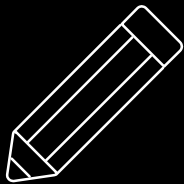
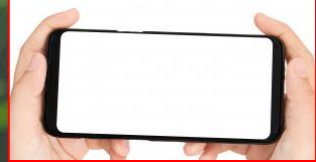


Aula 5



GAAL

ENG. DE ALIMENTOS



Prof. Dr. Paulo A. Oliveira



Aula - 5

1. **Sistemas Lineares;**
2. **Eliminação de Gauss;**
3. **Sistemas Lineares impossíveis e indeterminados.**



(MEG) Método Eliminação de Gauss



Considerando que $\det(A) \neq 0$, é sempre possível reescrever o sistema linear de forma que o elemento da posição a_{11} seja diferente de zero, usando apenas a operação elementar (i):

$$\text{Seja } A^{(0)} | b^{(0)} = A | b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots\dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots\dots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \dots\dots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array} \right)$$

onde $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $b_i^{(0)} = b_i$ e $a_{11}^{(0)} \neq 0$.

(SL) Eliminação de Gauss



Etapa 1

A eliminação da variável x_1 das equações $i = 2, \dots, n$ é feita da seguinte forma: da equação i subtraímos a 1ª equação multiplicada por m_{i1} . Observamos que para que esta eliminação seja efetuada, a única escolha possível é $m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, $i = 2, \dots, n$.

Os elementos $m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, $i = 2, \dots, n$ são os *multiplicadores* e o elemento $a_{11}^{(0)}$ é denominado *pivô* da 1ª etapa.

(SL) Eliminação de Gauss

Etapa 1

Ao final desta etapa teremos a matriz:

$$A^{(1)} | b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots\dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots\dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots\dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right)$$

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)} \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

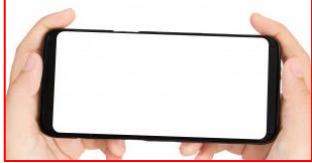
$$b_1^{(1)} = b_1^{(0)}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}a_{1j}^{(0)} \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, n \\ \text{e } j = 1, \dots, n \end{array}$$

$$b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1}b_1^{(0)} \quad i = 2, \dots, n$$



(SL) Eliminação de Gauss



Etapa 2

Deve-se ter pelo menos um elemento $a_{i2}^{(1)} \neq 0$, para $i = 2, \dots, n$, caso contrário, $\det(A^{(1)}) = 0$, o que implica que $\det(A) = 0$; mas $\det(A) \neq 0$, por hipótese.

Então, é sempre possível reescrever a matriz $A^{(1)}$, sem alterar a posição da linha 1, de forma que o pivô, $a_{22}^{(1)}$, seja não nulo.

Os multiplicadores desta etapa serão os elementos $m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ para $i = 3, \dots, n$.

A variável x_2 é eliminada das equações $i = 3, \dots, n$ da seguinte forma: da equação i subtraímos a segunda equação multiplicada por m_{i2} .

(SL) Eliminação de Gauss

Etapa 2

Ao final, teremos a matriz $A^{(2)} \mid b^{(2)}$:

$$A^{(2)} \mid b^{(2)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right)$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} \text{ para } i = 1, 2 \text{ e } j = i, i+1, \dots, n$$

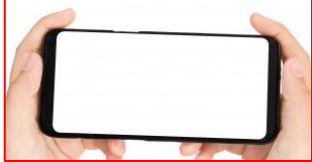
$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} \text{ para } i = 1, 2$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2}a_{2j}^{(1)} \text{ para } i = 3, \dots, n \text{ e } j = 2, \dots, n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2}b_2^{(1)} \text{ para } i = 3, \dots, n$$



(SL) Eliminação de Gauss

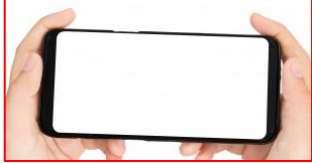


Etapa (n-1)

$$A^{(n-1)} \mid b^{(n-1)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & \dots & a_{1n}^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \dots & a_{2n}^{(n-1)} & b_2^{(n-1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n-1)} & \dots & a_{3n}^{(n-1)} & b_3^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array} \right)$$

e o sistema linear $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$ é triangular superior e equivalente ao sistema linear original.

(SL) Eliminação de Gauss



Exemplos: Resolva os sistemas abaixo, use o passo-a-passo do MEG:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

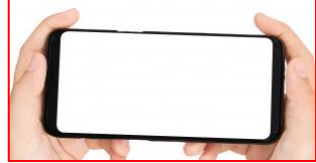
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$



Sistemas Lineares Indeterminados Impossíveis

$$\text{Det}(A) = 0$$

(SL) Eliminação de Gauss

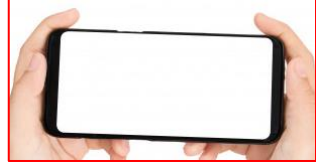


ATENÇÃO NO RESULTADO:

$$\begin{cases} x & - & 2z & = & 3 \\ & y & + & 5z & = & 2 \\ & & & 0 & = & -4 \end{cases}$$

Em geral, um sistema linear não tem solução se, e somente se, a última linha não nula da forma escalonada reduzida da sua matriz aumentada for da forma $[0 \dots 0 \mid b'_m]$, com $b'_m \neq 0$.

(SL) Eliminação de Gauss



Esta matriz é escalonada reduzida. Portanto o sistema dado é equivalente ao sistema seguinte

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 2w = -5 \\ z - 3w = 2. \end{array} \right.$$

A matriz deste sistema possui duas colunas sem pivôs. As variáveis que não estão associadas a pivôs podem ser consideradas **variáveis livres**, isto é, podem assumir valores arbitrários. Neste exemplo as variáveis y e w não estão associadas a pivôs e podem ser consideradas variáveis livres. Sejam $w = \alpha$ e $y = \beta$. As variáveis associadas aos pivôs terão os seus valores dependentes das variáveis livres, $z = 2 + 3\alpha$, $x = -5 - 2\alpha - 3\beta$. Assim, a solução geral do sistema é

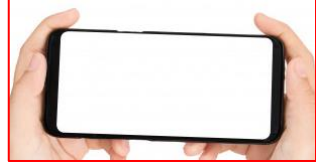
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 - 2\alpha - 3\beta \\ \beta \\ 2 + 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{para todos os valores de } \alpha \text{ e } \beta \text{ reais.}$$

Aplicação de Sistemas:



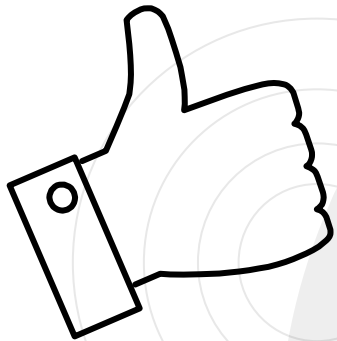
Exemplo 1.11. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R\$ 2,00, R\$ 3,00 e R\$ 5,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1 kg de A e 2 kg de B, essa indústria arrecadou R\$ 2500,00. Vamos determinar quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos.

Método diretos x Cálculo Numérico



Pertencem a esta classe todos os métodos estudados nos cursos de 1º e 2º graus, destacando-se a regra de Cramer. Este método, aplicado à resolução de um sistema $n \times n$ envolve o cálculo de $(n + 1)$ determinantes de ordem n . Se n for igual a 20 podemos mostrar que o número total de operações efetuadas será $21 \times 20! \times 19$ multiplicações mais um número semelhante de adições. Assim, um computador que efetue cerca de cem milhões de multiplicações por segundo levaria 3×10^5 anos para efetuar as operações necessárias.

Desta forma, o estudo de métodos mais eficientes é necessário, pois, em geral, os problemas práticos exigem a resolução de sistemas lineares de grande porte, isto é, sistemas que envolvem um grande número de equações e variáveis.



ATÉ A PRÓXIMA
AULA!

Estude bastante!

