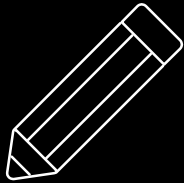
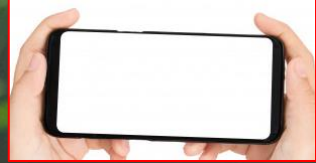


Aula 4



GAAL

ENG. DE ALIMENTOS

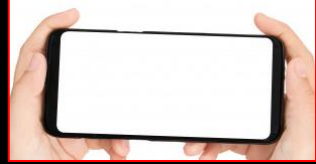


Prof. Dr. Paulo A. Oliveira



Aula - 4

1. **Sistemas;**
2. **Sistemas Lineares – forma geral**
3. **Regra de Crame**
4. **Forma Triangular;**





//

SISTEMAS LINEARES

SISTEMAS LINEARES

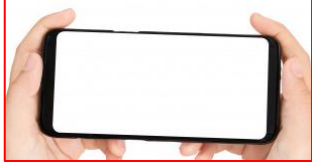


O que é um S.L.?

Um **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear** é um conjunto de equações lineares, ou seja, é um conjunto de equações da forma

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.



(SL) Notação Matricial

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

é o vetor das variáveis

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

é o vetor constante.

(SL) Representação



Exemplo O sistema linear de duas equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

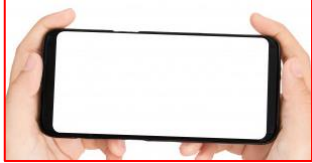
pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução (geral) do sistema acima é $x = -1/3$ e $y = 2/3$ (verifique!) ou

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(SL) Exercícios

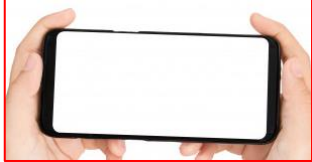


Escreva os sistemas abaixo usando a notação matricial.

$$S_1 \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} 3x + y - z = 4 \\ 2x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$S_3 \begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Op. Elem. x (SL) Equivalentes



Seja $Ax = b$ um sistema linear. Aplicando sobre as equações deste sistema uma seqüência de operações elementares escolhidas entre:

- i) trocar duas equações;
- ii) multiplicar uma equação por uma constante não nula;
- iii) adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação;

obtemos um novo sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ e os sistemas $Ax = b$ e $\tilde{A}x = \tilde{b}$ são equivalentes.

(SL): Soma e Substituição



$$\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$x = -1 - y$$

Na Eq.1:

$$5x - 3y = 11$$

$$5 \cdot (-1 - y) - 3y = 11$$

$$-8y = 11 + 5$$

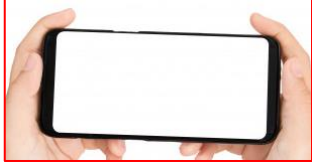
$$y = \frac{16}{-8} = -2$$

Na Eq. 2:

$$x = -1 - y$$

$$x = -1 - (-2)$$

$$x = 1$$

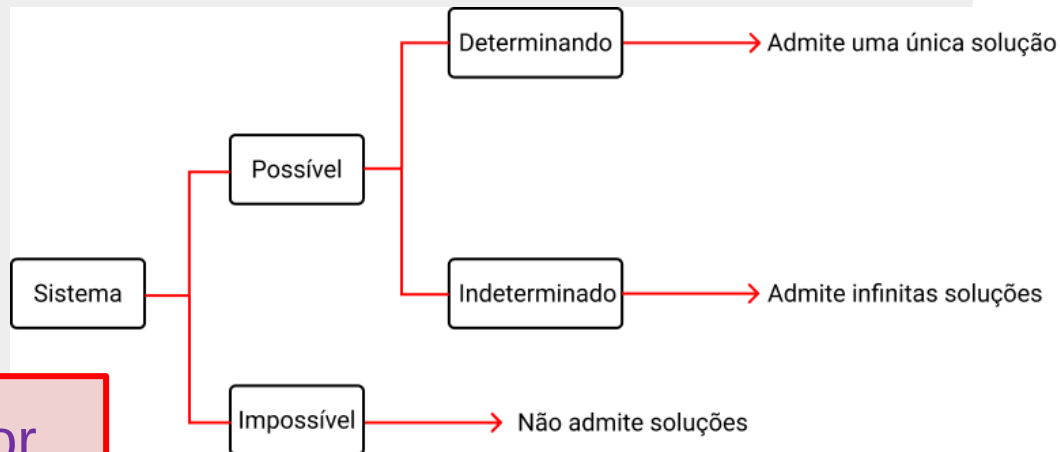


(SL): Métodos de Cramer

- Usa os determinantes

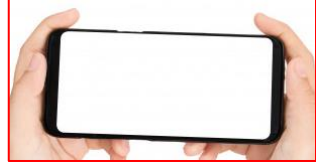
$$x_a = \frac{Dx_a}{D}, \text{ para } a \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} \boxed{b_1} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



Fazer o exerc. anterior

(SLT) Sist. Lineares Triangulares



Seja o sistema linear $Ax = b$, onde A : matriz $n \times n$, triangular superior, com elementos da diagonal diferentes de zero. Escrevendo as equações deste sistema, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \quad a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

(SLT) Sist. Lineares Triangulares



Da última equação, temos

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

x_{n-1} pode então ser obtido da penúltima equação:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

e assim sucessivamente obtém-se x_{n-2} , ..., x_2 e finalmente x_1 :

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

(SLT) Sist. Lineares Triangulares



Exemplo: Resolva os sistemas, use o passo-a-passo do SLT:

$$\begin{cases} y_1 &= 1 \\ 1/3y_1 + y_2 &= 2 \\ 4/3y_1 + y_2 + y_3 &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ -4x_3 = 0 \end{cases}$$

(MEG) Método Eliminação de Gauss



Considerando que $\det(A) \neq 0$, é sempre possível reescrever o sistema linear de forma que o elemento da posição a_{11} seja diferente de zero, usando apenas a operação elementar (i):

$$\text{Seja } A^{(0)} | b^{(0)} = A | b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots\dots\dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots\dots\dots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \dots\dots\dots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array} \right)$$

onde $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $b_i^{(0)} = b_i$ e $a_{11}^{(0)} \neq 0$.

(SL) Eliminação de Gauss



Etapa 1

A eliminação da variável x_1 das equações $i = 2, \dots, n$ é feita da seguinte forma: da equação i subtraímos a 1ª equação multiplicada por m_{i1} . Observamos que para que esta eliminação seja efetuada, a única escolha possível é $m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, $i = 2, \dots, n$.

Os elementos $m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, $i = 2, \dots, n$ são os *multiplicadores* e o elemento $a_{11}^{(0)}$ é denominado *pivô* da 1ª etapa.

(SL) Eliminação de Gauss

Etapa 1

Ao final desta etapa teremos a matriz:

$$A^{(1)} | b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots\dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots\dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots\dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right)$$

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)} \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

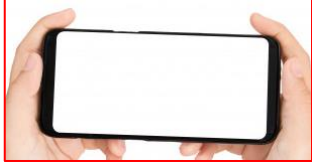
$$b_1^{(1)} = b_1^{(0)}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}a_{1j}^{(0)} \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, n \\ \text{e } j = 1, \dots, n \end{array}$$

$$b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1}b_1^{(0)} \quad i = 2, \dots, n$$



(SL) Eliminação de Gauss



Etapa 2

Deve-se ter pelo menos um elemento $a_{i2}^{(1)} \neq 0$, para $i = 2, \dots, n$, caso contrário, $\det(A^{(1)}) = 0$, o que implica que $\det(A) = 0$; mas $\det(A) \neq 0$, por hipótese.

Então, é sempre possível reescrever a matriz $A^{(1)}$, sem alterar a posição da linha 1, de forma que o pivô, $a_{22}^{(1)}$, seja não nulo.

Os multiplicadores desta etapa serão os elementos $m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ para $i = 3, \dots, n$.

A variável x_2 é eliminada das equações $i = 3, \dots, n$ da seguinte forma: da equação i subtraímos a segunda equação multiplicada por m_{i2} .

(SL) Eliminação de Gauss

Etapa 2

Ao final, teremos a matriz $A^{(2)} \mid b^{(2)}$:

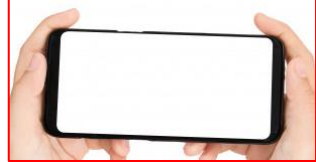
$$A^{(2)} \mid b^{(2)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right)$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} \text{ para } i = 1, 2 \text{ e } j = i, i+1, \dots, n$$

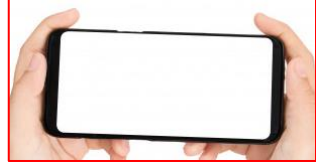
$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} \text{ para } i = 1, 2$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2}a_{2j}^{(1)} \text{ para } i = 3, \dots, n \text{ e } j = 2, \dots, n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2}b_2^{(1)} \text{ para } i = 3, \dots, n$$



(SL) Eliminação de Gauss

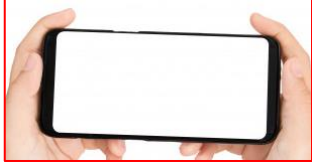


Etapa (n-1)

$$A^{(n-1)} | b^{(n-1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & \dots & a_{1n}^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \dots & a_{2n}^{(n-1)} & b_2^{(n-1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n-1)} & \dots & a_{3n}^{(n-1)} & b_3^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array} \right)$$

e o sistema linear $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$ é triangular superior e equivalente ao sistema linear original.

(SL) Eliminação de Gauss



Exemplos: Resolva os sistemas abaixo, use o passo-a-passo do MEG:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

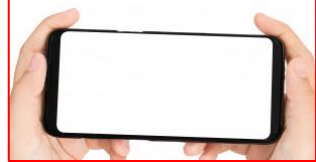
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ x + y = -1 \end{cases}$$




$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$


$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$



OBRIGADO por sua atenção!



Assista, pause e reflita sobre este vídeo! 😊



Leia o material sugerido (Livro e artigos)!



Busque mais informações por sua conta!



Faça os exercícios propostos o quanto antes!