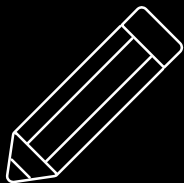


Aula 2: 14/03/2024

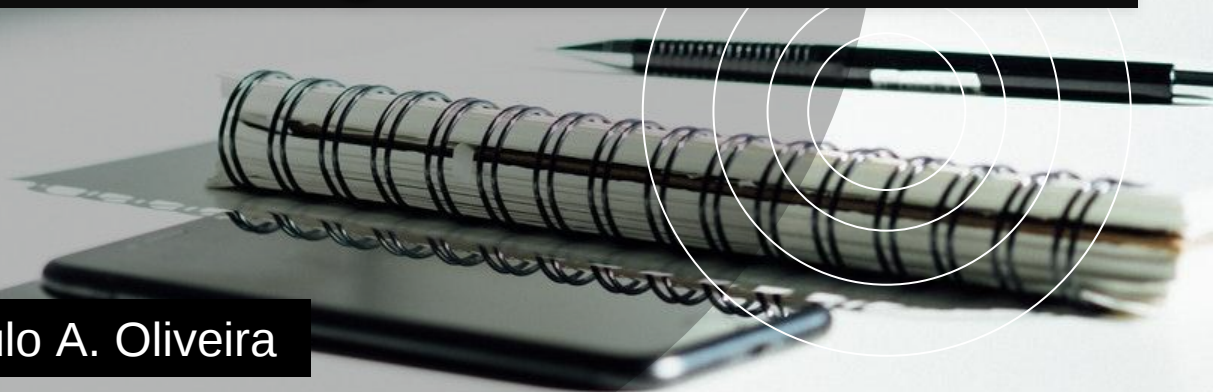


G A A L – 2024/01

Curso: Eng. de Alimentos



Prof. Dr. Paulo A. Oliveira





Aula - 2

1. Revisão da aula 1: matrizes.
2. Determinantes 2×2 , 3×3 ;
3. Regra Geral: Teorema fundamental de Laplace.



// MATRIZES

INVERSAS

Inversa de uma Matriz: Definição



A inversa da matriz $A_{n \times n}$, definida por A^{-1} , da mesma ordem de A , é matriz que satisfaz as seguintes igualdades:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Obs.: Temos pelo menos três maneiras de obtermos a inversa:

I – Por operações Elementares;

II – Pela matriz adjunta;

III – Pela resolução de sistemas lineares;

Inversa de Matrizes: Operações Elementares



1) trocar linhas de lugar;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \{L2 \leftrightarrow L3\} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2) multiplicar uma linha por um número qualquer não-nulo;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \{L3 = 4 L3\} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & -4 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Inversa de Matrizes: Operações Elementares



3) somar a uma linha, outra linha multiplicada por um número qualquer não nulo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & -4 & 4 & 12 \end{bmatrix} \quad \{L2 = 5 L3 - 8 L2\} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -36 & -12 & 12 \\ 8 & -4 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Objetivo do método: transforma o lado esquerdo, da equivalência, no lado direito, usando somente as operações elementares

$$A \mid I_n \equiv I_n \mid A^{-1}$$

Matrizes: Exercícios



Considere as matrizes A, e B abaixo e resolva o itens:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B_{3 \times 3} = \begin{cases} i + j & \text{se } i \geq j \\ i - j & \text{se } i < j \end{cases}$$

- 1) A^{-1} pelo método das operação elementares
- 2) B^{-1} pelo método das operação elementares
- 3) Verificar os itens anteriores pelo Symbolab

Determinantes: Definição ($n < 4$)



Consideremos o conjunto das *matrizes quadradas* de elementos reais. Seja M uma matriz de ordem n desse conjunto. Chamamos *determinante da matriz M* (e indicamos por $\det M$) o número que podemos obter operando com os elementos de M da seguinte forma:

1.º) Se M é de ordem $n = 1$, então $\det M$ é o único elemento de M .

$$M = [a_{11}] \implies \det M = a_{11}$$

Exemplo

$$M = [6] \implies \det M = 6.$$

Podemos também indicar o *determinante de M* pelo símbolo $|a_{11}|$, isto é, colocando uma barra vertical de cada lado de M .

Determinantes: Definição ($n < 4$)



3º) Se M é de ordem $n = 3$, isto é,

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ definimos:}$$

$$\det M = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - \\ - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Podemos memorizar esta definição da seguinte forma:

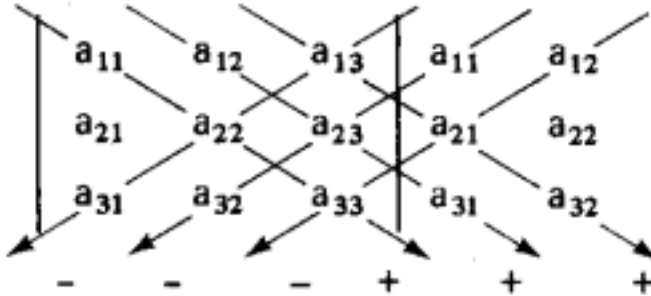
- Repetimos ao lado da matriz, as duas primeiras colunas.
- Os termos precedidos pelo sinal $\oplus$ são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal:
 $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}; a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}; a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}.$

Determinantes: Definição ($n < 4$)



c) Os termos precedidos pelo sinal $\ominus$ são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária:

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}; -a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}; -a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$



Este dispositivo prático é conhecido como regra de Sarrus para o cálculo de determinantes de ordem 3.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 + 80 - 8 + 12 - 30 = 49$$



// Regra Geral

Determinantes

Matrizes – Determinantes



A regra geral, o Teorema Fundamental de Laplace, é usado para matrizes de ordem maior que 3. Usamos uma das seguintes fórmulas:

$$[j \text{ fixo}] \Rightarrow \det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(\bar{A}_{ij})$$

$$[i \text{ fixo}] \Rightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(\bar{A}_{ij})$$

Determinante: Regra Geral



Menor Complementar (D_{ij})

É o determinante da matriz obtida após ser eliminada a linha e a coluna do elemento a_{ij} considerado.

Ex. Sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, calcule D_{12}

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \det &= 3 + 10 \\ \det &= 13 \\ D_{12} &= 13 \end{aligned}$$

Determinante: Regra Geral



Cofator

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Ex. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, calcule C_{21}

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21} \Rightarrow C_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_{21} = (-1) \cdot [-1 - 14] \Rightarrow C_{21} = 15$$

Regra Geral - Exemplo



O determinante é a soma dos produtos dos elementos de uma fileira (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

1	2	1	0
3	1	2	4
0	0	2	1
4	5	0	1

$$C_{33} = (-1)^{(3+3)} \cdot D_{33}$$
$$C_{33} = 1 \cdot (-26 + 33) = 7$$

1	2	1	0
3	1	2	4
0	0	2	1
4	5	0	1

$$C_{34} = (-1)^{(3+4)} \cdot D_{34}$$
$$C_{34} = (-1)(-14 + 31) = -17$$

Regra Geral - Exemplo



O determinante é a soma dos produtos dos elementos de uma fileira (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

1	2	1	0
3	1	2	4
0	0	2	1
4	5	0	1

$$(i = 3) \Rightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \overbrace{\det(\bar{A}_{ij})}^{\text{cofator} = C_{ij}}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^4 a_{3j} \cdot (-1)^{3+j} \cdot \det(\bar{A}_{3j})$$

$$\det(A) = a_{31} \cdot (-1)^4 \cdot \det(\bar{A}_{31}) + a_{32} \cdot (-1)^5 \cdot \det(\bar{A}_{32}) + \dots + a_{34} \cdot (-1)^7 \cdot \det(\bar{A}_{34})$$

$$\det(A) = 0 \cdot C_{31} + 0 \cdot C_{32} + 2 \cdot C_{33} + 1 \cdot C_{34}$$

$$\det(A) = 2 \cdot 7 + 1 \cdot (-17)$$

$$\det(A) = 14 - 17$$

$$\det(A) = -3$$



//

MATRIZ INVERSA

(RETOMANDO)

Matriz Inversa: Operações Elementares



(JÁ ESTUDAMOS)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A \mid In$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

... Op. elementares

$$In \mid A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa: Pela adjunta



- ❑ Seja A uma matriz quadrada de ordem n . A **inversa de A existe** se, e somente se, **$\det A \neq 0$** .
- ❑ A inversa da matriz A (caso exista) é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot [\text{cof } A]^t$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

- ✓ $[\text{cof } A]$ = matriz dos cofatores de A , também chamada de **matriz adjunta** de A .

Matriz Inversa: Por Sistemas Lineares



$$A.A^{-1} = I_n$$

(ESTUDAREMOS DEPOIS
DE SISTEMAS)

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos assim:

$$6a + 2c = 1$$

$$6b + 2d = 0$$

$$11a + 4c = 0$$

$$11b + 4d = 1$$

Resolvendo o sistema
encontramos:

$$a = 2$$

$$b = -1$$

$$c = -11/2$$

$$d = 3$$

Matriz Inversa: Exemplo

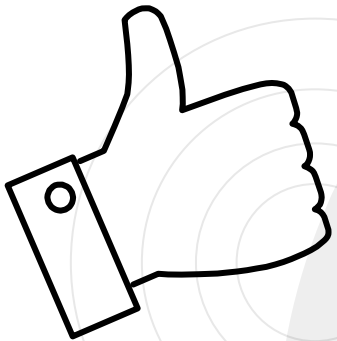


Calcule a inversa de M pelos dois primeiros métodos:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A) = \text{cof}(A)^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Adj}(A) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$



ATÉ A PRÓXIMA
AULA!

Estude bastante!