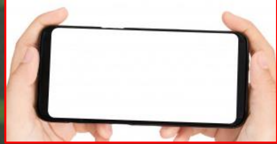
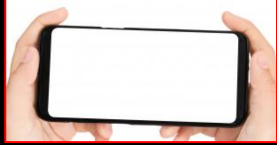


Aula 1

G A A L

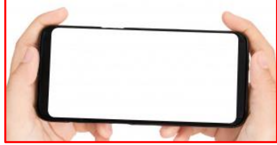
Eng. de Alimentos

Prof. Dr. Paulo A. Oliveira

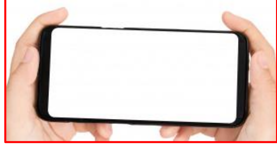


Aula – 1

1. Apresentação do plano da disciplina.
2. Operações com matrizes e propriedades;
3. Determinantes: introdução;



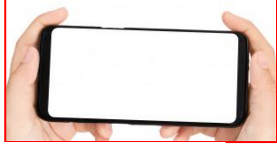
Plano da disciplina (no AVA)



MATRIZES

OPERAÇÕES & PROPRIEDADES

Matrizes: Definição



Uma **matriz** A, $m \times n$ (m por n), é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A i**-ésima linha** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix},$$

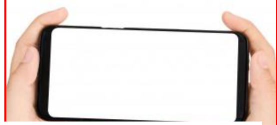
para $i = 1, \dots, m$ e a j**-ésima coluna** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},$$

para $j = 1, \dots, n$. Usamos também a notação $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Dizemos que a_{ij} ou $[A]_{ij}$ é o **elemento** ou a **entrada** de posição i, j da matriz A.

Se $m = n$, dizemos que A é uma **matriz quadrada de ordem** n e os elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formam a **diagonal (principal)** de A.

Matrizes: Operação Soma



Definição 1.1. A **soma** de duas matrizes de **mesmo tamanho** $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$

$$C = A + B$$

obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \, ,$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplo 1.2. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Se chamamos de C a soma das duas matrizes A e B, então

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 + (-2) & 2 + 1 & -3 + 5 \\ 3 + 0 & 4 + 3 & 0 + (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Matrizes: Operação multiplicação por escalar

Definição 1.2. A **multiplicação de uma matriz** $A = (a_{ij})_{m \times n}$ **por um escalar** (número) α é definida pela matriz $m \times n$

$$B = \alpha A$$

obtida multiplicando-se cada elemento da matriz A pelo escalar α, ou seja,

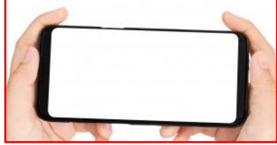
$$b_{ij} = \alpha\, a_{ij}\,,$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[\alpha A]_{ij} = \alpha\, a_{ij}$. Dizemos que a matriz B é um **múltiplo escalar** da matriz A.

Exemplo 1.3. O produto da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ pelo escalar -3 é dado por

$$-3\,A = \begin{bmatrix} (-3)(-2) & (-3)\,1 \\ (-3)\,0 & (-3)\,3 \\ (-3)\,5 & (-3)(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}.$$

Matrizes: Operação Produto



Definição 1.3. O **produto** de duas matrizes, tais que **o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda**, $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é definido pela matriz $m \times n$

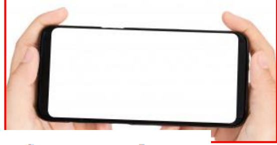
$$C = AB$$

obtida da seguinte forma:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}, \tag{1.1}$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$.

Matrizes: Operação Produto



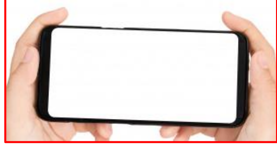
A equação (1.1) está dizendo que o elemento i, j do produto é igual à soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna de B.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

A equação (1.1) pode ser escrita de forma compacta usando a **notação de somatório**.

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Matrizes: Operação Produto

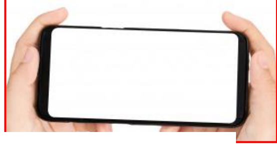


A equação (1.1) pode ser escrita de forma compacta usando a **notação de somatório**.

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

e dizemos "somatório de k variando de 1 a p de $a_{ik}b_{kj}$". O símbolo $\sum_{k=1}^{p}$ significa que estamos fazendo uma soma em que o índice k está variando de $k = 1$ até $k = p$. Algumas propriedades da notação de somatório estão explicadas no Apêndice I na página 32.

Matrizes: Operação Produto



Exemplo 1.4. Considere as matrizes:

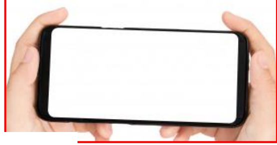
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se chamamos de C o produto das duas matrizes A e B, então

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1(-2) + 2 \cdot 0 + (-3)5 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-3)(-4) & 0 \\ 3(-2) + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 5 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 0(-4) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 0 \\ -6 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação. No exemplo anterior o produto BA não está definido (por que?). Entretanto, mesmo quando ele está definido, BA pode não ser igual a AB, ou seja, o produto de matrizes **não é comutativo**, como mostra o exemplo seguinte.

Matrizes: Transpostas



Definição 1.4. A **transposta** de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é definida pela matriz $n \times m$

$$B = A^t$$

obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji}\,,$$

para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Escrevemos também $[A^t]_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 1.7. As transpostas das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{são}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Matrizes: PROPRIEDADES (TEOREMAS)

Teorema 1.1. *Sejam A, B e C matrizes com tamanhos apropriados, α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades para as operações matriciais:*

(a) *(comutatividade)* $A + B = B + A$;

(b) *(associatividade)* $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(c) *(elemento neutro) A matriz* $\bar{0}$, $m \times n$, *definida por* $[\bar{0}]_{ij} = 0$, *para* $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ *é tal que*

$$A + \bar{0} = A,$$

para toda matriz A, $m \times n$. *A matriz* $\bar{0}$ *é chamada* ***matriz nula*** $m \times n$.

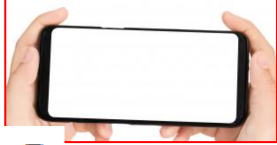
(d) *(elemento simétrico) Para cada matriz* A, *existe uma única matriz* $-A$, *definida por* $[-A]_{ij} = -a_{ij}$ *tal que*

$$A + (-A) = \bar{0}.$$

(e) *(associatividade)* $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;

(f) *(distributividade)* $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

Matrizes: PROPRIEDADES (TEOREMAS)



(g) (distributividade) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

(h) (associatividade) $A(BC) = (AB)C$;

(i) (elemento neutro) Para cada inteiro positivo p a matriz, $p \times p$, chamada **matriz identidade** é tal que

$$A\,I_n = I_m A = A, \quad \text{para toda matriz } A = (a_{ij})_{m\times n}.$$

(j) (distributividade) $A(B+C) = AB + AC$ e $(B+C)A = BA + CA$;

(k) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

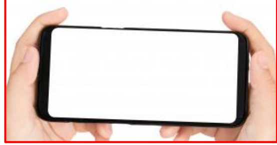
(l) $(A^t)^t = A$;

(m) $(A+B)^t = A^t + B^t$;

(n) $(\alpha A)^t = \alpha\, A^t$;

(o) $(AB)^t = B^t A^t$;

Matrizes: Exercícios



Considere as matrizes A, B e C abaixo e resolva o itens:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \qquad C_{2\times 3} = \{c_{ij} = 2i - 3j\}$$

1) D = 2A-3B

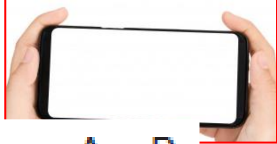
2) E = AC – BC

3) F = CA + CB

4) G = A^2-2B

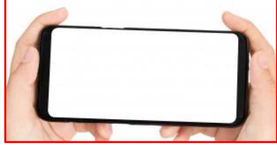
5) H = C^t.A

Matrizes: Exercícios



Exemplo 1.11. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R$ 2,00, R$ 3,00 e R$ 5,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1 kg de A e 2 kg de B, essa indústria arrecadou R$ 2500,00. Vamos determinar quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos. Como vimos no Exemplo 1.6 na página 8, usando matrizes o

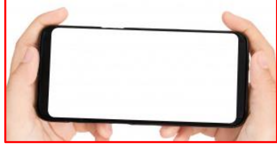
Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 2 gramas do insumo A e 1 grama do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 3 gramas de insumo B e, para cada kg de Z, 3 gramas de A e 5 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R$ 3,00, R$ 2,00 e R$ 4,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1,9 kg de A e 2,4 kg de B, essa indústria arrecadou R$ 2900,00. Determine quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos. (Sugestão: veja o Exemplo 1.11 na página 39.)



„MATRIZES

INVERSAS

Inversa de uma Matrizes: Definição



A inversa da matriz A_{nxn}, definida por A^{-1}, da mesma ordem de A, é matriz que satisfaz as seguintes igualdades:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

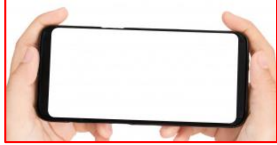
Obs.: Temos pelo menos três maneira de obtermos a inversas:

I – Por operações Elementares;

II – Pela matriz adjunta;

III – Pela resolução de sistemas lineares;

Inversa de Matrizes: Operações Elementares



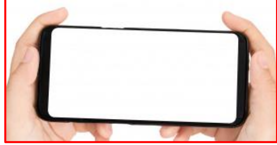
1) trocar linhas de lugar;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \{L2 \leftrightarrow L3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2) multiplicar uma linha por um número qualquer não-nulo;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \{L3 = 4\,L3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & -4 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Inversa de Matrizes: Operações Elementares



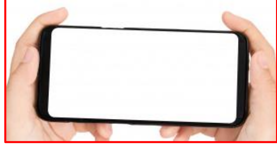
3) somar a uma linha, outra linha multiplicada por um número qualquer não nulo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & -4 & 4 & 12 \end{bmatrix} \{L2 = 5\,L3 - 8\,L2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -36 & -12 & 12 \\ 8 & -4 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Objetivo do método: transforma o lado esquerdo, da equivalência, no lado direito, usando somente as operações elementares

$$\boldsymbol{A \mid I_n \equiv I_n \mid A^{-1}}$$

Matrizes: Exercícios



Considere as matrizes A, e B abaixo e resolva o itens:

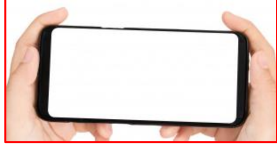
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_{3\times 3} = \begin{cases} i + j \; se \; i \geq j \\ i - j \; se \; i < j \end{cases}$$

1) A^{-1} pelo método das operação elementares

2) B^{-1} pelo método das operação elementares

3) Verificar os itens anteriores pelo Symbolab

Determinantes: Definição (n < 4)



Consideremos o conjunto das *matrizes quadradas* de elementos reais. Seja M uma matriz de ordem n desse conjunto. Chamamos *determinante da matriz M* (e indicamos por det M) o número que podemos obter operando com os elementos de M da seguinte forma:

1º) *Se M é de ordem n = 1,* então det M é o único elemento de M.

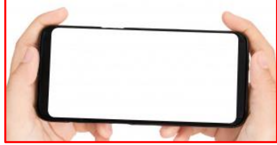
$$\mathbf{M} = [a_{11}] \Longrightarrow \mathbf{det\ M} = a_{11}$$

Exemplo

$$M = [6] \Longrightarrow \det M = 6.$$

Podemos também indicar *o determinante de M* pelo símbolo $|a_{11}|$, isto é, colocando uma barra vertical de cada lado de M.

Determinantes: Definição (n < 4)



2º) *Se M é de ordem n = 2,* o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

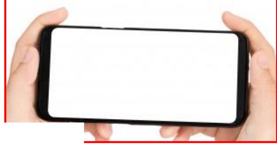
$-$ $\qquad$ $+$

Exemplos

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4(-1) = 10$$

$$\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} y & \cos y \end{vmatrix} = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \cos(x + y)$$

Determinantes: Definição (n < 4)



3º) *Se M é de ordem n = 3*, isto é,

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \text{definimos:}$$

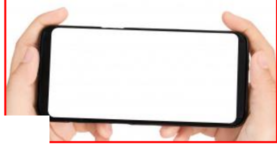
$$\textbf{det M} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Podemos memorizar esta definição da seguinte forma:

a) Repetimos ao lado da matriz, as duas primeiras colunas.

b) Os termos precedidos pelo sinal (+) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal:

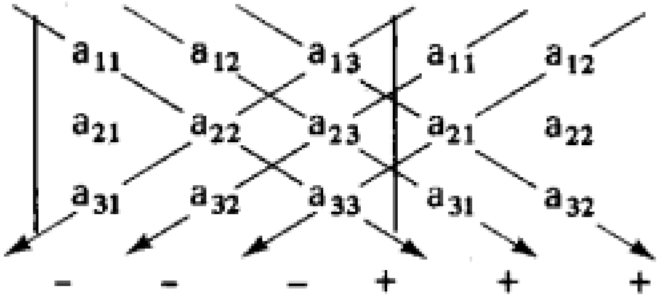
$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$; $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$; $a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$.



Determinantes: Definição (n < 4)

c) Os termos precedidos pelo sinal (−) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária:

$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$; $-a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$; $-a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$.

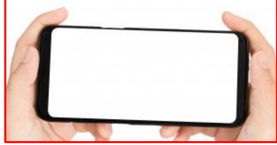


Este dispositivo prático é conhecido como *regra de Sarrus* para o cálculo de determinantes de ordem 3.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 + 80 - 8 + 12 - 30 = 49$$

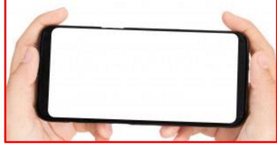
Matrizes: Exercícios



Considere as matrizes A, e B abaixo e resolva o itens:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_{3\times 3} = \begin{cases} i + j \ se \ i \geq j \\ i - j \ se \ i < j \end{cases}$$

1) **Det(A) e Det(3.A) pela regra de Sarrus;**
2) **Det(B) e Det(-2.B) pela regra de Sarrus;**
3) **Verificar os itens anteriores pelo Symbolab**



ATÉ A PRÓXIMA AULA!

Estude bastante!