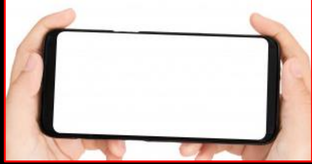
CURSO DE NIVELAMENTO 2023/02

UFT / PALMAS

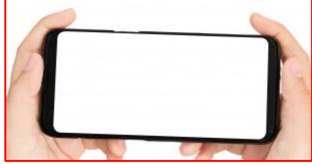
Prof. Dr. Paulo A. Oliveira



Conteúdo:
Funções

- ✓ **Definição de função;**
- ✓ **Algumas classif. de função;**
- ✓ **Função exponencial;**
- ✓ **Função logarítmica;**
- ✓ **Aplicativos para funções.**

Funções de número Reais

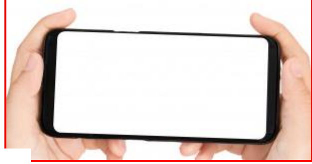


Dados A e B dois conjuntos de R:

uma **função** $f : A \to B$ é uma ***relação ou correspondência*** que a cada elemento de A associa um único elemento de B.

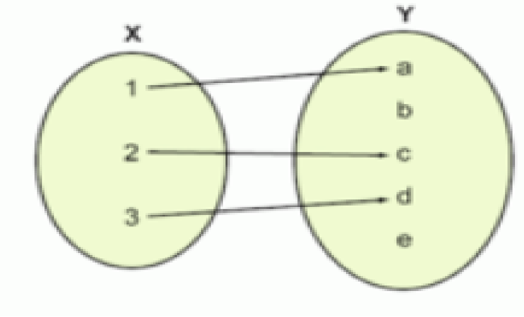
As funções ***servem para descrever*** o mundo real em termos matemáticos.

Classificação das funções:



FUNÇÃO INJETORA OU INJETIVA

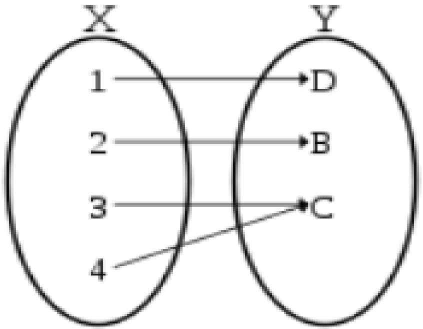
Cada elemento da imagem está associado a apenas um elemento do domínio



O número de elementos no contradomínio pode ser igual ou maior que na imagem da função.

FUNÇÃO SOBREJETORA OU SOBREJETIVA

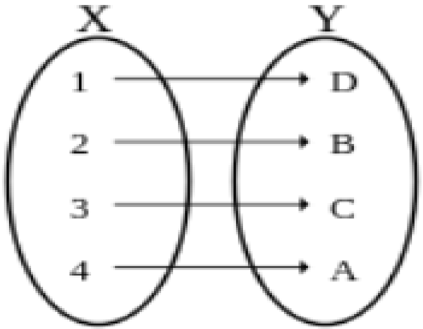
Todos os elementos do contradomínio estão associados a algum elemento do domínio.



O conjunto imagem é igual ao conjunto contradomínio (CD=I).

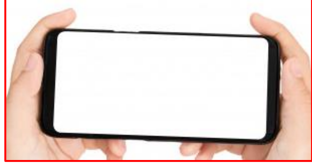
FUNÇÃO BIJETORA OU BIJETIVA

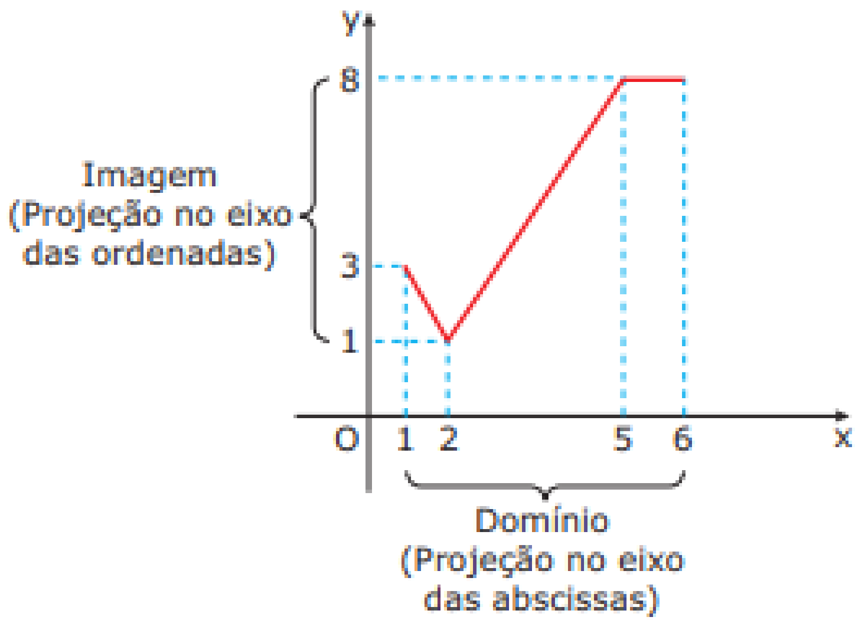
São ao mesmo tempo sobrejetoras e injetoras.



Todos os elementos do domínio estão associados a todos os elementos do contradomínio de forma um para um e exclusiva. (CD=I)

Gráfico de uma função





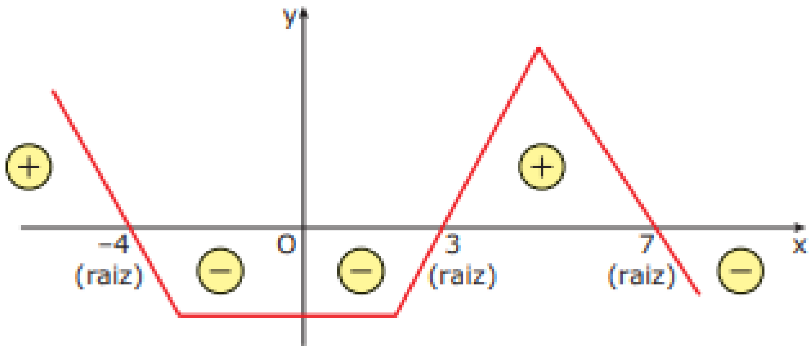
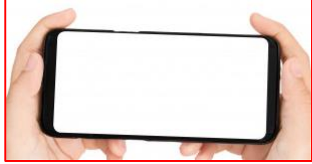


Gráfico de uma função



Propriedades das potências

Sendo **a** e **b** números reais, **m** e **n** números inteiros, valem as seguintes propriedades:

1. Potências de mesma base

Para **multiplicar**, mantém-se a base e **somam-se os expoentes**.

Para **dividir**, mantém-se a base e **subtraem-se os expoentes**.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

Exemplos

a) $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

b) $\dfrac{2^{80}}{2^{78}} = 2^{80-78} = 2^2 = 4$

2. Potências de mesmo expoente

Para **multiplicar**, mantém-se o expoente e **multiplicam-se as bases**.

Para **dividir**, mantém-se o expoente e **dividem-se as bases**.

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0$$

Exemplos

a) $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$

b) $\dfrac{6^4}{2^4} = \left(\dfrac{6}{2}\right)^4 = 3^4 = 81$

3. Potência de potência

Para calcular a potência de outra potência, mantém-se a base e **multiplicam-se os expoentes**.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

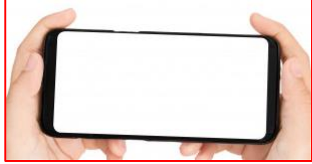
Exemplos

a) $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

b) $(a^2 \cdot b^3)^2 = (a^2)^2 \cdot (b^3)^2 = a^{2 \cdot 2} \cdot b^{3 \cdot 2} = a^4 \cdot b^6$

Potências x Raízes

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$



Sendo **a** e **b** números reais positivos e **n** um número natural não nulo, valem as seguintes propriedades:

1. Radicais de mesmo índice

Para **multiplicar**, mantém-se o índice e **multiplicam-se os radicandos**.

Para **dividir**, mantém-se o índice e **dividem-se os radicandos**.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \ b \neq 0$$

Exemplos

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $\sqrt[3]{32} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$

2. Raiz de raiz

Para calcular uma **raiz de outra raiz**, mantém-se o radicando e **multiplicam-se os índices**.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \quad n, m \in \mathbb{N}^*$$

Exemplos

a) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{3}}} = \sqrt[24]{3}$

3. Raiz de potência

Calcular a raiz e em seguida a potência é o mesmo que **calcular a potência e em seguida a raiz**.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \ m \in \mathbb{Z}$$

Exemplos

a) $\sqrt{4^5} = \left(\sqrt{4}\right)^5 = 2^5 = 32$

b) $\sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

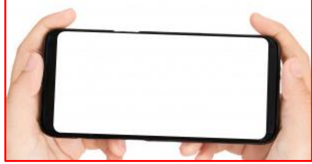
4. Alteração do índice

Multiplicar ou dividir **índice e expoente** por um mesmo número **não altera o resultado**.

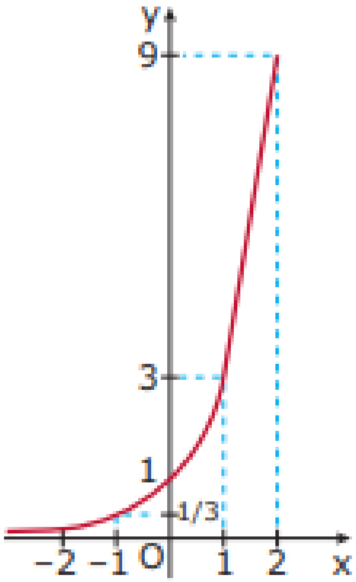
$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}, \ m \in \mathbb{Z}, \ p \in \mathbb{N}^*$$

Função exponencial

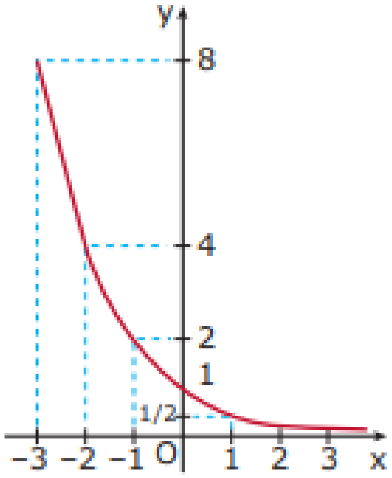
$$f(x) = a^x$$
$$\forall a > 0$$



x	$y = 3^x$
−2	$\frac{1}{9}$
−1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27



x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Propriedades da Função exponencial

Se $a > 1$, então a função $f(x) = a^x$ é **crescente**.

Exemplo

$f(x) = 2^x$

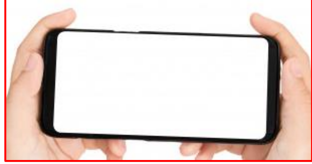
Se $0 < a < 1$, então a função $f(x) = a^x$ é **decrescente**.

Trata-se de uma função injetora, pois a cada valor da imagem corresponde um único valor do domínio.

O domínio de uma função exponencial é sempre igual ao conjunto dos números reais ($D = \mathbb{R}$).

A curva está toda acima do eixo das abscissas, pois $y = a^x$ é sempre maior que zero para todo **x** real. Portanto, a sua imagem Im é dada por $Im = \mathbb{R}_+^*$.

A curva corta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$. Isso ocorre porque, para $x = 0$, temos $y = a^0 = 1$.



Número de Euler

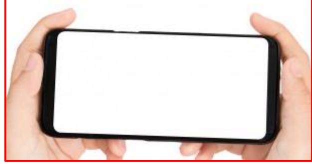
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

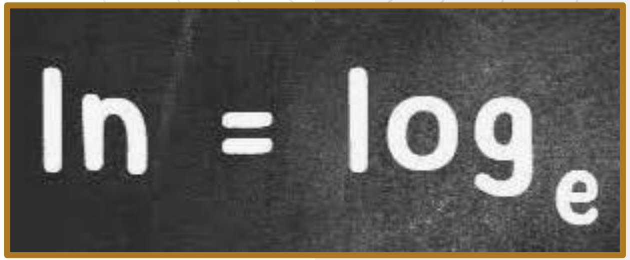
$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

e

2,718281828...

Número de Euler





$$S_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1} = 2$$

$$S_{10} = \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}59374$$

$$S_{100} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}70581$$

$$S_{1000} = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}71693$$

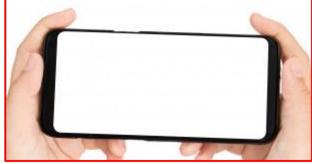
$$S_{2000} = \left(1+\frac{1}{2000}\right)^{2000} = 2{,}71760$$

$$S_{5000} = \left(1+\frac{1}{5000}\right)^{5000} = 2{,}71801$$

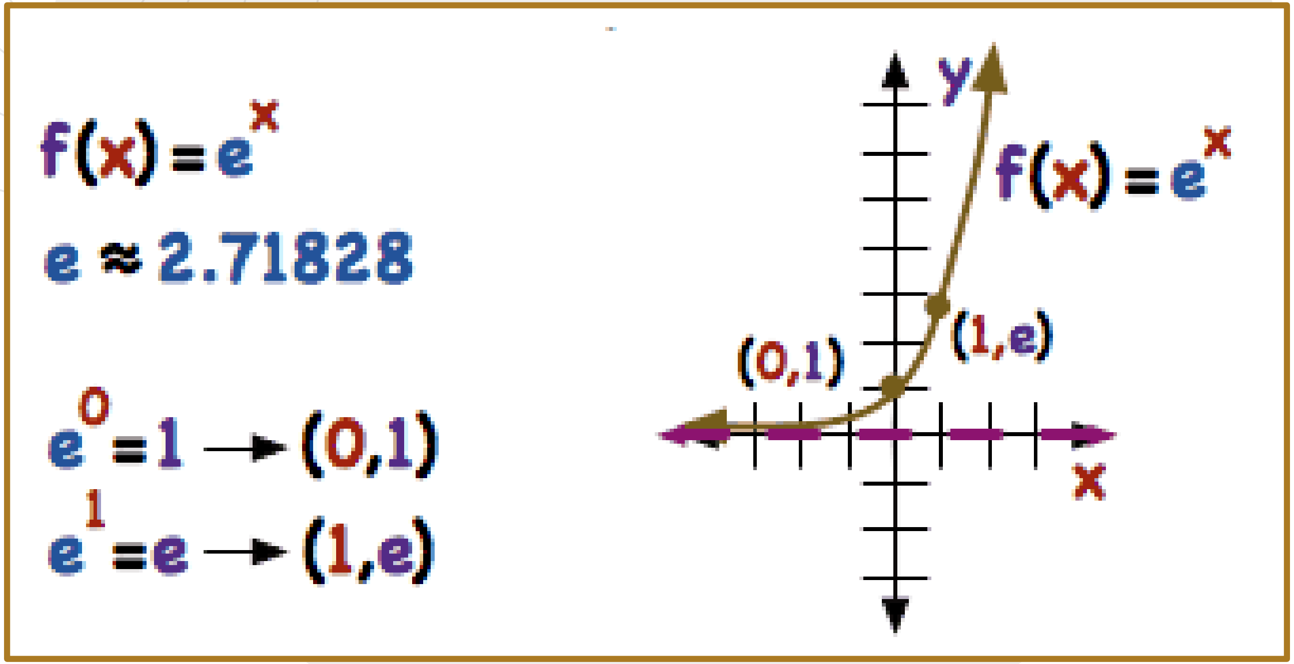
$$S_{10000} = \left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2{,}71814$$

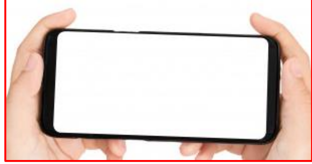
$$S_{20000} = \left(1+\frac{1}{20000}\right)^{20000} = 2{,}71821$$

Número de Euler x função



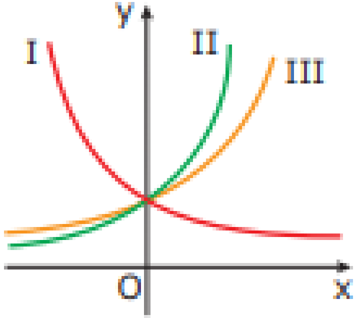
$$f(x) = e^x$$





01. Determinar os valores de **k** para os quais a função $f(x) = \left(2 + \frac{3k}{5}\right)^x$ é crescente.

02. (Mackenzie-SP) Na figura, os gráficos I, II e III referem-se, respectivamente, às funções $y = a^x$, $y = b^x$ e $y = c^x$.



Então, está **CORRETO** afirmar que

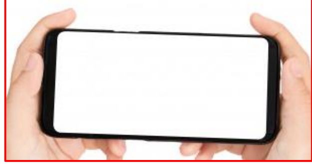
A) $0 < a < b < c$

B) $0 < b < c < a$

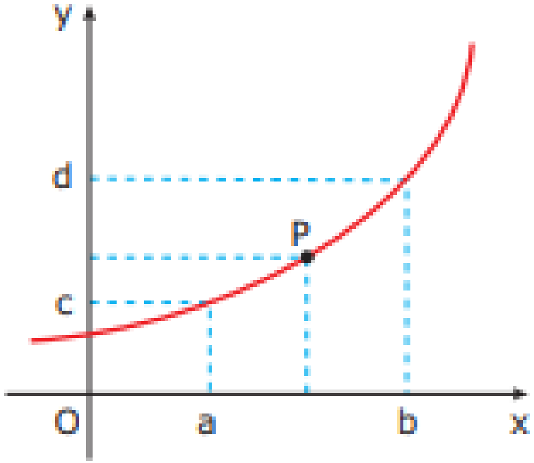
C) $a < 0 < b < c$

D) $0 < a < c < b$

E) $a < 0 < c < b$



(UFLA-MG–2007) A figura é um esboço do gráfico da função $y = 2^x$. A ordenada do ponto **P** de abscissa $\frac{a+b}{2}$ é



A) $\sqrt{cd}$ B) $\sqrt{c + d}$ C) cd D) $(cd)^2$

(FUVEST-SP) Seja $f(x) = 2^{2x+1}$. Se **a** e **b** são tais que $f(a) = 4f(b)$, pode-se afirmar que

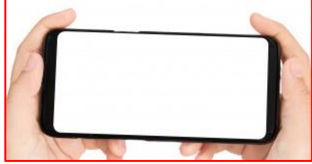
A) $a + b = 2$

B) $a + b = 1$

C) $a - b = 3$

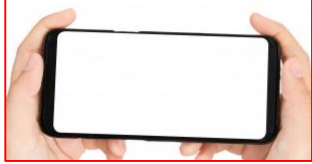
D) $a - b = 2$

E) $a - b = 1$



(UNIRIO-RJ) Numa população de bactérias, há $P(t) = 10^8 . 4^{3t}$ bactérias no instante **t** medido em horas (ou fração da hora). Sabendo-se que inicialmente existem 10^8 bactérias, quantos minutos são necessários para que se tenha o dobro da população inicial?

A) 20 B) 12 C) 30 D) 15 E) 10



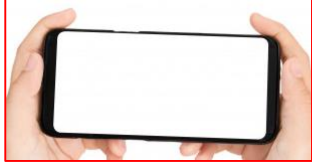
(PUC Minas) Os pontos A(1, 6) e B(2, 18) pertencem ao gráfico da função $y = n.a^x$. Então, o valor de a^n é

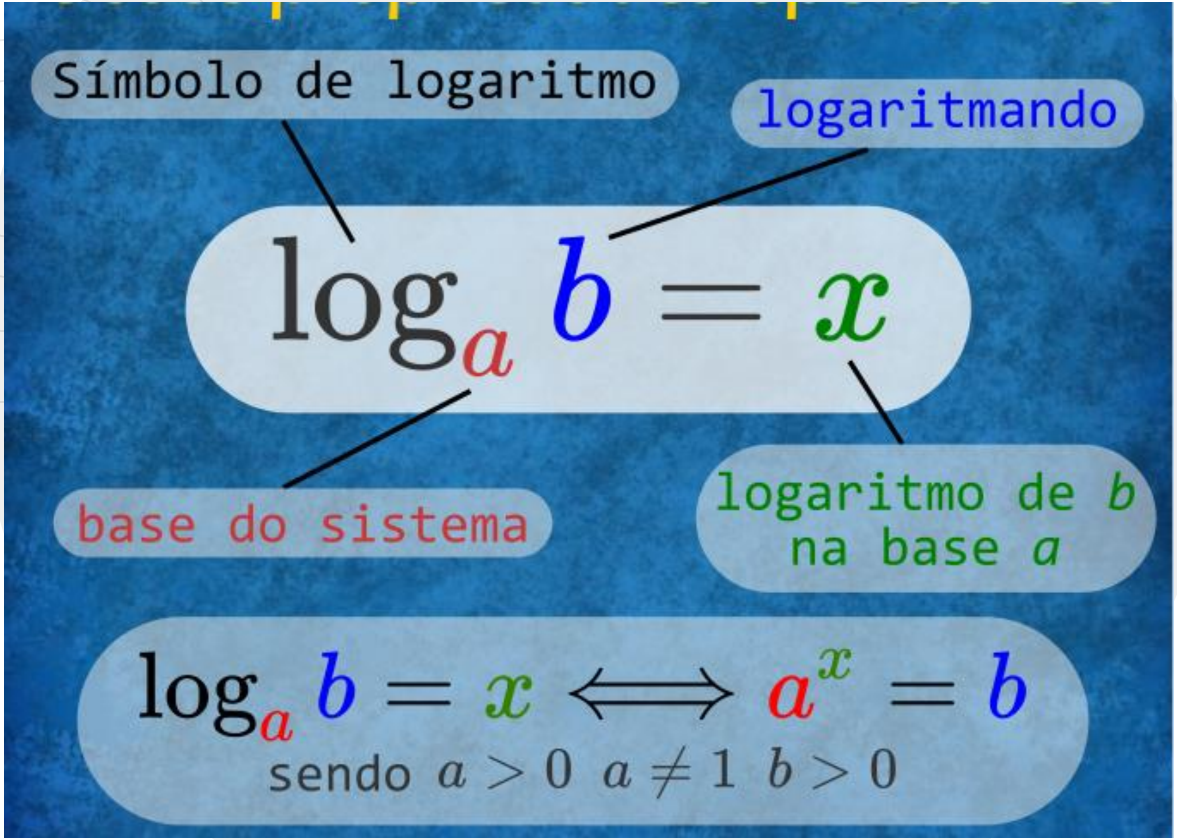
A) 6 B) 9 C) 12 D) 16

(FGV-SP–2010) O valor de um carro decresce exponencialmente, de modo que seu valor, daqui a **x** anos, será dado por $V = A.e^{-k.x}$, em que e = 2,7182... . Hoje, o carro vale R$ 40 000,00 e daqui a 2 anos valerá R$ 30 000,00. Nessas condições, o valor do carro daqui a 4 anos será

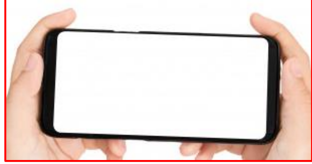
A) R$ 17 500,00.
B) R$ 20 000,00.
C) R$ 22 500,00.
D) R$ 25 000,00.
E) R$ 27 500,00.

Função Logarítmica





Exemplos e propriedades do Log



1º) $\log_2 32$

Resolução:

$\log_2 32 = x \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

2º) $\log_{0,2} 625$

Resolução:

$\log_{0,2} 625 = x \Rightarrow 0{,}2^x = 625 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = 625 \Rightarrow$

$5^{-x} = 5^4 \Rightarrow x = -4$

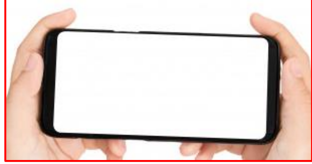
i) $\log_a a = 1$, pois $a = a^1$;

ii) $\log_a 1 = 0$, pois $1 = a^0$;

iii) $\log_a a^k = k$, pois $a^k = a^k$;

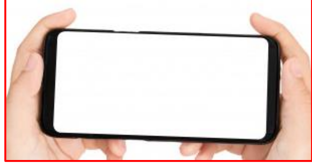
iv) $a^{\log_a b} = b$.

Propriedades do log



LOGARITMO DO PRODUTO	$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
LOGARITMO DO QUOCIENTE	$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
LOGARITMO DA POTÊNCIA	$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$
LOGARITMO DE BASE COM POTÊNCIA	$\log_{a^x} b = \frac{1}{x} \log_a b$
MUDANÇA DE BASE	$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

Mudança de Base do Log



$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ sendo } \log_c a \neq 0, \text{ ou seja, } a \neq 1.$$

$$(\log_a b)(\log_b a) = 1$$

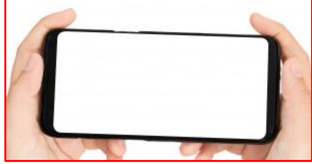
Exemplo:

Escrever $\log_3 4$ na base 4.

Resolução:

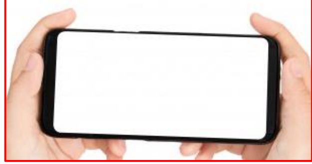
$$\log_3 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 3} = \frac{1}{\log_4 3} \Rightarrow (\log_3 4).(\log_4 3) = 1$$

Exercício (Log)



Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\log_2 (1 - 5x) = -3$.

Log e Ln



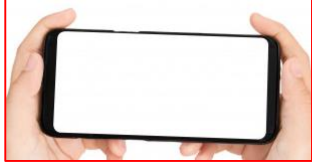
$$Log(x) = Log_{10}(x)$$

$$Ln(x) = Log_e(x)$$

$$e^{\ln(x)} = x$$

Função Log

$$f(x) = log_a(x)$$
$$\forall x > 0, 0 < a \neq 1$$



Chama-se função logarítmica toda função **f**, de domínio $\mathbb{R}_+^*$ e contradomínio $\mathbb{R}$, que associa a cada número real positivo **x** o logaritmo $\log_a x$, sendo **a** um número real positivo e diferente de 1.

$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \mid f(x) = \log_a x$, em que $0 < a \neq 1$

Exemplos

1º) $f(x) = \log_5 x$

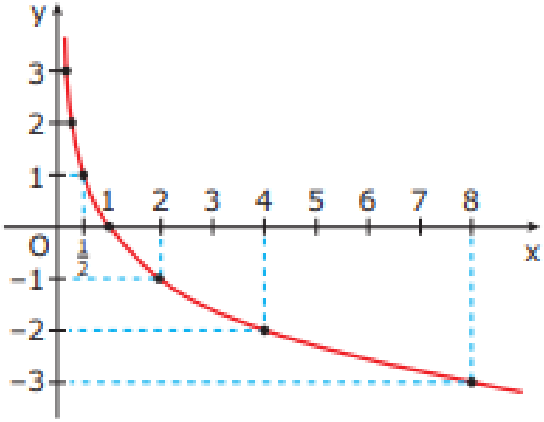
2º) $f(x) = \log_{0,4} x$

3º) $y = \ln x$

4º) $y = \log_{10} x$

Gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	y
8	−3
4	−2
2	−1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3



- Função decrescente
- Domínio $D = \mathbb{R}_+^*$
- Imagem $Im = \mathbb{R}$

Função Log

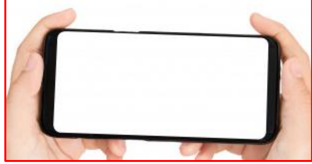
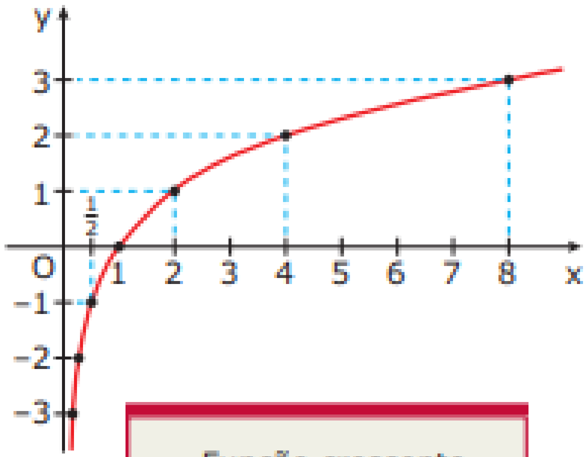


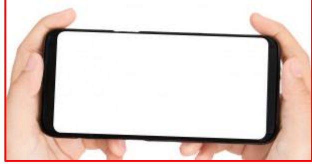
Gráfico da função $f(x) = \log_2 x$

x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

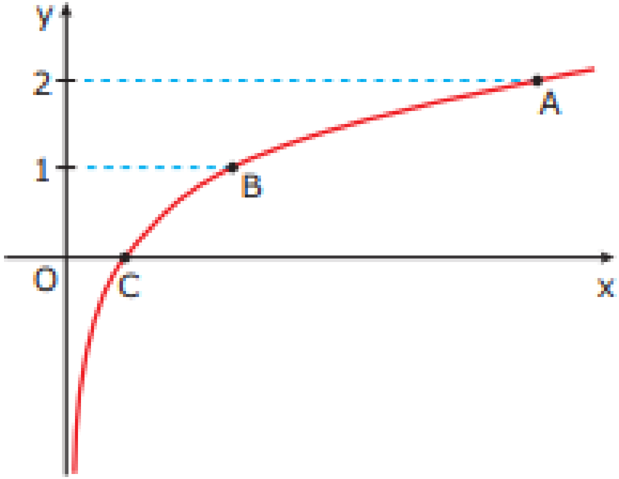


- Função crescente
- Domínio $D = \mathbb{R}_+^*$
- Imagem $Im = \mathbb{R}$

Exercícios



(UFJF-MG) A figura a seguir é um esboço, no plano cartesiano, do gráfico da função $f(x) = \log_b x$, com alguns pontos destacados. Supondo que a abscissa do ponto **A** é igual a 9, é **INCORRETO** afirmar que



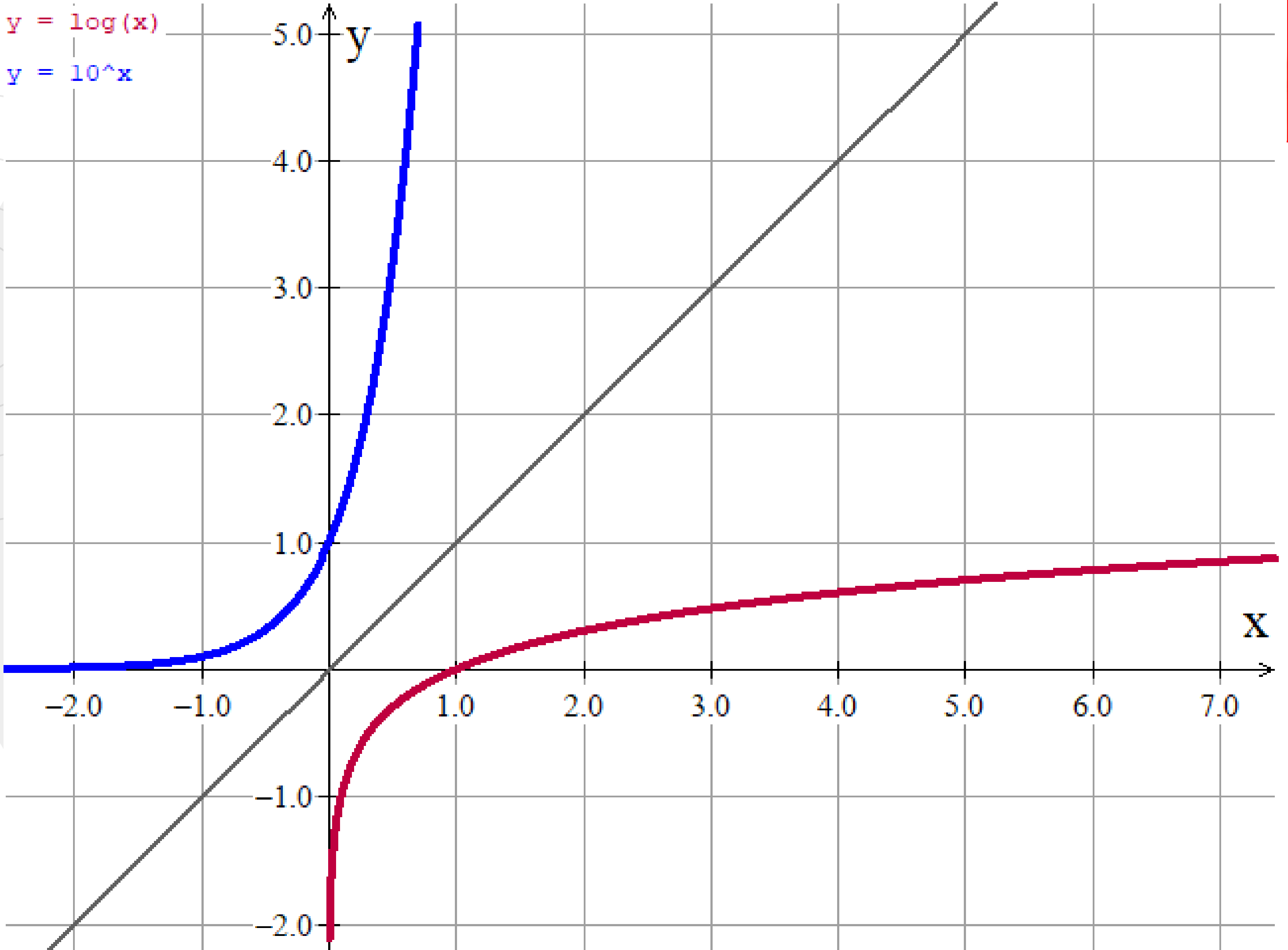
A) a base **b** é igual a 3.
B) a abscissa de **C** é igual a 1.
C) $f(x) < 0$ para todo $x \in (0, 1)$.
D) a abscissa de **B** é igual a 2.
E) $f(x)$ é crescente.

FUNÇÕES

INVERSAS

Log(x)

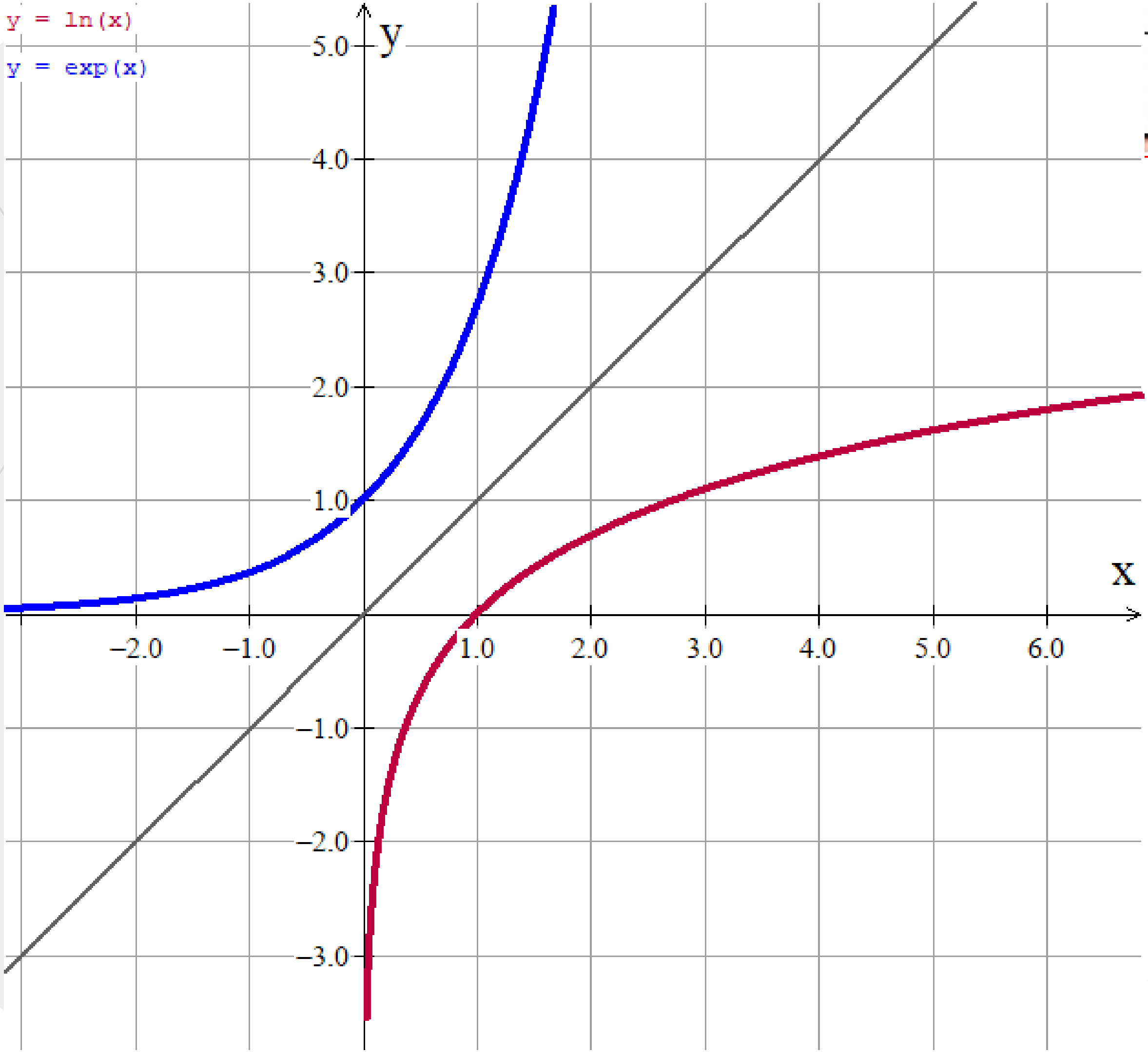
10^x



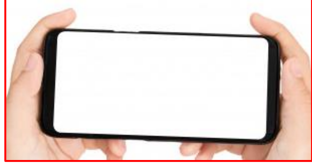
FUNÇÕES INVERSAS

Ln(x)

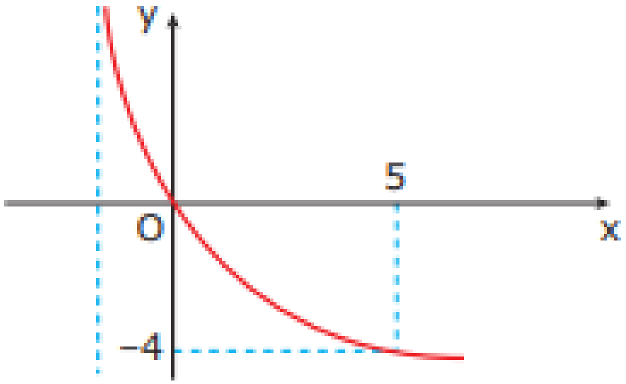
e^x



Exercícios



(UFMG) Observe a figura.



Nessa figura, está representado o gráfico da função

$f(x) = \log_2\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)$. Então, f(1) é igual

A) −3

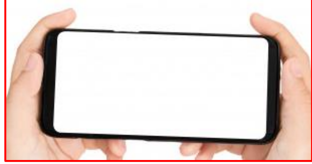
B) −2

C) −1

D) $-\dfrac{1}{2}$

E) $-\dfrac{1}{3}$

Exercícios



(FGV-SP–2010) Quantos números inteiros pertencem ao domínio da função $f(x) = \log(9 - x^2) + \log(2 - x)$?

A) 4

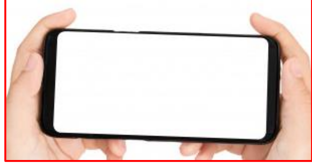
B) 3

C) 6

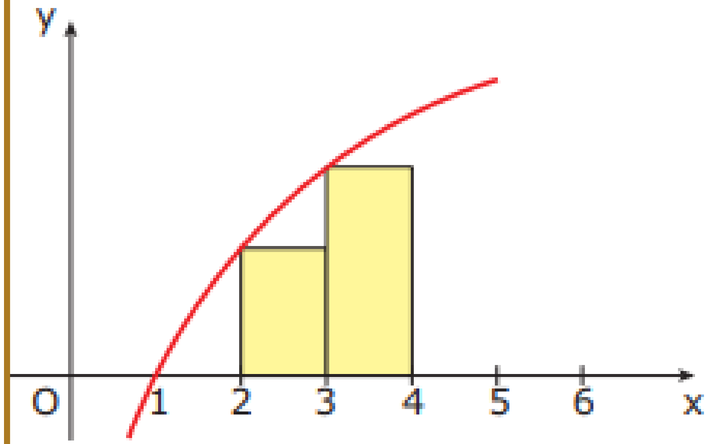
D) 5

E) Infinitos

Exercícios



(UFG) Se a curva da figura representa o gráfico da função $y = \log x$, $x > 0$, o valor da área sombreada é



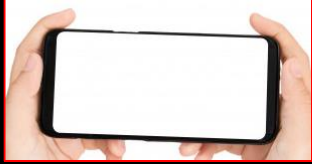
A) log 2

B) log 3

C) log 4

D) log 5

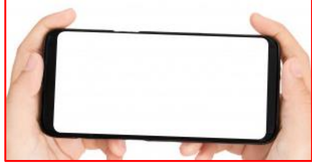
E) log 6

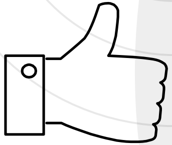


DICAS EXTRAS

- ✓ **Use o symbolab;**
- ✓ **Use a calculadora científica;**
- ✓ **Leia o material no site:**

  www.paulo.mat.br





ESTUDE SEMPRE !!!