7 APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Gil da Costa Marques

Fundamentos de Matemática I

7.1 Nas Ciências Econômicas

O melhor exemplo de utilização da função exponencial nas ciências econômicas é aquele que nos permite analisar e comparar resultados (denotados por R) de aplicações de uma quantia, denominada montante principal (P), a uma taxa de juros anual j. O resultado leva em conta o conceito de juro composto, que será explicado a seguir.

Considerando o primeiro ano, o resultado da aplicação é dado pela soma do capital aplicado acrescido do rendimento da aplicação, isto é, para o primeiro ano podemos escrever o resultado $R(1)$ da aplicação da seguinte maneira:

$$R(1) = P + jP = P(1 + j) \tag{7.1}$$

Ao se iniciar o segundo ano, tudo se passa como se tivéssemos aplicado o resultado do primeiro ano, raciocinando em seguida como antes. Assim, o resultado ao término do segundo ano, $R(2)$, se escreve:

$$R(2) = R(1) + jR(1) = R(1)(1 + j) \tag{7.2}$$

Utilizando agora o resultado **7.1** em **7.2**, obtemos para o segundo ano:

$$R(2) = P(1 + j)^2 \tag{7.3}$$

Assim, de modo geral, o resultado da aplicação a uma taxa de juros anual pode ser escrito como função do tempo (número de anos), t, sob a forma de uma função exponencial:

$$\boxed{R(t) = P(1 + j)^t} \tag{7.4}$$

Por exemplo, aplicando um montante de R\$10.000,00 a uma taxa de juros (compostos) de 8% ao ano, então, o resultado como função do número de anos será:

$$R(t) = 10000(1 + 0,08)^t = 10000(1,08)^t \tag{7.5}$$

Ao término do quinto ano, o aplicador verificará que o saldo da sua aplicação, em reais, será:

$$S = R(t=5) = 10000(1,08)^5 \cong 14.693,28 \qquad 7.6$$

Muita vezes, há interesse em saber o resultado da aplicação quando os resultados não são lançados anualmente, mas, como é mais usual, mensalmente, bimestralmente, trimestralmente etc. No primeiro caso (mensal), temos 12 períodos de um mês em cada ano. No segundo, 6 períodos de dois meses; no terceiro, 4 períodos de 3 meses.

Seja m o número de períodos em um ano e suponhamos o capital aplicado a uma taxa anual.

Considerando a taxa de juros no período como a taxa anual dividida pelo número de períodos em um ano, o saldo (ou resultado) do primeiro ano será dado pela expressão:

$$R(1) = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^m \qquad 7.7$$

enquanto, para o segundo, teremos:

$$R(2) = R(1)\left(1+\frac{j}{m}\right)^m = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{2m} \qquad 7.8$$

Assim, o saldo da aplicação (ou resultado anual) como função do tempo será dado:

$$R(t) = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mt} \qquad 7.9$$

Retomando o exemplo anterior, analisemos agora o efeito da aplicação do mesmo montante, mas considerando depósitos na conta da aplicação feitos trimestralmente. Temos agora

$$R(t) = 10000\left(1+\frac{0,08}{4}\right)^{4t} = 10000(1,02)^{4t} \qquad 7.10$$

Ao término do primeiro ano, o resultado será dado, em reais, por:

$$R(1) = 10000(1,02)^4 \cong 10.824,32 \qquad 7.11$$

Trata-se, portanto, de uma forma de remuneração melhor do que aquela em que o resultado é lançado anualmente.

Considere agora o caso em que aplicamos um montante de R$10.000,00. Admitindo que obtenhamos depois de um ano o montante de R$31.384,28, qual o valor da taxa de juros mensal?

De **7.4** resulta que

$$31.384,28 = 10.000\left(1+j\right)^{12} \tag{7.12}$$

e, portanto,

$$\log\left(1+j\right) = \frac{1}{12}\log 3,138428 \tag{7.13}$$

donde obtemos aproximadamente:

$$j \cong 10\% \text{ mensais}$$

Consideremos a expressão **7.9**, no caso em que os resultados são lançados continuamente, simulando uma situação de hiperinflação. Nesse caso, tomamos o limite em que o número de períodos tende a infinito. O resultado, nessa situação de juros rendendo continuamente (e não em saltos) é o seguinte:

$$R_{\text{cont}}\left(t\right) = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mt} \tag{7.14}$$

Colocando $\dfrac{m}{j} = n$, podemos escrever:

$$R_{\text{cont}}\left(t\right) = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\left(\frac{m}{j}\right)jt} = P\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{jt} \tag{7.15}$$

Levando em conta que

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \tag{7.16}$$

vemos que o resultado da aplicação aumenta continuamente de acordo com o crescimento exponencial:

$$R_{\text{cont}}\left(t\right)=Pe^{jt} \tag{7.17}$$

Mais adiante, serão retomadas essas questões envolvendo limites, no tema específico sobre limite de uma função. O intuito aqui foi mostrar uma situação importante que envolve a função exponencial de base *e*.

7.2 Radioatividade e aplicações na Medicina

7.2.1 Meia-vida e vida média

Partículas que compõem a matéria ou o núcleo dos átomos, como os nêutrons, desaparecem, dando lugar a outras. Essa é a base da emissão espontânea por parte de substâncias radioativas.

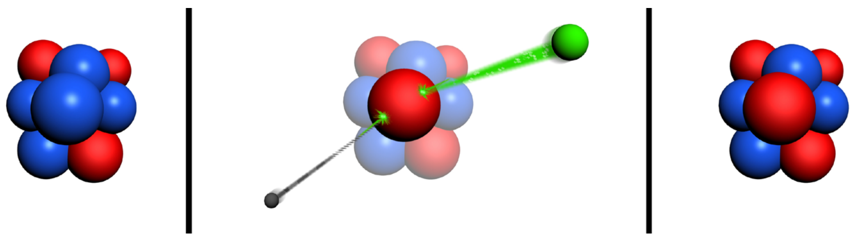


Figura 7.1: O decaimento radioativo leva à transmutação de elementos químicos.

A principal característica dos decaimentos radioativos é o fato de que a diminuição do número de átomos, representada por $-dN$, num intervalo de tempo dt, é proporcional ao intervalo e ao número de átomos existentes N, ou seja, vale a lei do decaimento:

$$dN=-\lambda N dt \tag{7.18}$$

onde o sinal menos indica a redução do número de átomos e a constante λ é a constante de decaimento, que é uma característica de cada substância. Pode-se mostrar, utilizando **7.18**, que o número de átomos de um determinado tipo numa substância radioativa varia com o tempo de acordo com a expressão:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{7.19}$$

Define-se a **vida média** τ da substância como o inverso da constante de decaimento, isto é:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \tag{7.20}$$

Da expressão acima deduz-se que a vida média de um **radioisótopo** é o tempo necessário para que o número de átomos presentes se reduza a uma fração igual a $1/e$ da quantidade inicial. De **7.19** resulta que, por definição, quando $t = \tau$,

$$N(\tau) = N_0 e^{-1} = \frac{N_0}{e} \tag{7.21}$$

Assim, em termos da vida média τ, escrevemos:

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{1}{\tau}t} \tag{7.22}$$

Outra grandeza física relevante é a **meia-vida**, denotada por $T_{1/2}$, definida como o intervalo de tempo necessário para que o número de átomos radioativos se reduza à metade. Assim,

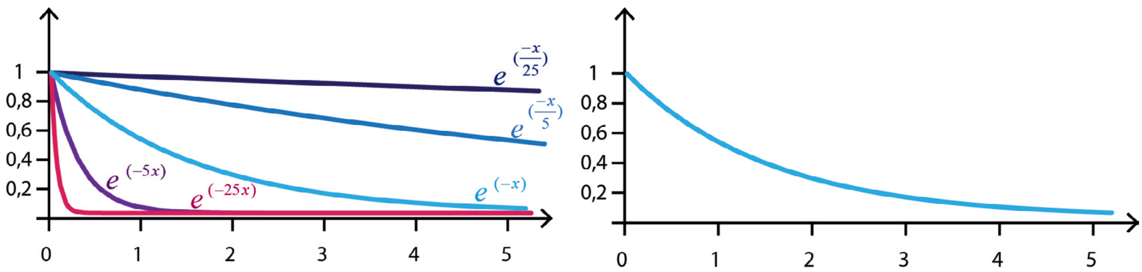
$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\frac{T_{1/2}}{\tau}} \tag{7.23}$$

Tomando o logaritmo de ambos os lados dessa equação, concluímos que a meia-vida se relaciona com a vida média ou a constante de decaimento da seguinte forma:

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{1}{\lambda} \ln 2 \tag{7.24}$$

A meia-vida de substâncias compostas apenas por um elemento radioativo difere enormemente de elemento para elemento, assim como difere para diferentes isótopos radioativos. Por exemplo, a meia-vida do Urânio 238 (U_{238}) é $T_{1/2} = 4{,}5 \times 10^9$ anos, isto é, 4,5 bilhões de anos.

Dura, portanto, por muito tempo e, por isso, esse dado é utilizado em processos de datação de rochas; presumivelmente, está entre os objetos mais velhos do nosso planeta. A meia-vida do Carbono 14, C_{14} é de 5.600 anos, sendo ele muitas vezes utilizado na datação de fósseis.



Gráficos 7.1 e 7.2: Gráficos do decaimento exponencial.

Alguns Isótopos utilizados na medicina, no diagnóstico médico, têm meias-vidas relativamente curtas. Por exemplo, o **Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares** (IPEN) produz quatro radioisótopos. Dois deles são produzidos no reator e dois deles no acelerador Cíclotron, cujas meias-vidas são apresentadas na **Tabela 7.1**.

Tabela 7.1: Meias-vidas de alguns radioisótopos

Reator - IPEN	Iodo - 131	8,02 dias
	Samário - 153	46,7 horas
Cíclotron (Acelerador) - IPEN	F-18	110 min
	Iodo - 123	13 horas

É curioso observar que um deles se reduz à metade num prazo menor do que duas horas, ou seja, qualquer que seja o seu uso, é importante ser transportado rapidamente. Assim, o uso de radioisótopos na medicina muitas vezes impõe problemas de logística na sua distribuição aos hospitais pelas várias cidades do País. Uma demora demasiada levará a uma redução significativa de um material raro, encarecendo ainda mais o próprio diagnóstico.

7.3 Na Biologia Celular

Figura 7.2: Reprodução de uma bactéria.

A E. Coli é uma bactéria muito utilizada na Biologia Celular. Uma das características mais úteis é a sua facilidade de reprodução. Sob determinadas condições, uma cultura dessa bactéria tem o número de células duplicado a cada quinze minutos. Se numa cultura iniciamos com 10.000 células, ao cabo de *n* períodos de 15 minutos, o número de células será dado por:

$$N_c(n) = 10.000(2^n) \tag{7.25}$$

Assim, depois de 12 horas, isto é, 48 períodos de 15 minutos, encontraremos um total de:

$$N_c(48) = 10.000(2^{48}) = 10.000 \cdot 281474976710656 \text{ bactérias.} \tag{7.26}$$

7.4 Escalas logarítmicas

Quando grandezas físicas atingem grandes valores, é usual utilizarmos uma escala na qual a grandeza é expressa em termos do seu logaritmo (na base 10). A seguir apresentamos dois exemplos.

7.4.1 A escala Richter

Figura 7.3: Charles Francis Richter (1900-1985)

Esta escala é utilizada para expressar, de forma indireta, a intensidade dos terremotos. Um terremoto produz ondas sísmicas, que podem ser caracterizadas pela sua amplitude. Como veremos a seguir, pode-se relacionar a energia liberada com a amplitude das ondas sísmicas.

As amplitudes das ondas sísmicas dependem da distância epicentral (a distância até o epicentro do terremoto). Para entender essa dependência, o primeiro passo dado por Richter foi o de construir um diagrama cartesiano; nele são colocados no eixo das ordenadas os valores, para um mesmo sismo, dos logaritmos das amplitudes, enquanto no eixo das abscissas são colocados os valores das distâncias epicentrais relativas às diversas estações sismológicas, expressas em quilômetros. Tal diagrama reflete, em última análise, o efeito da atenuação da onda propagada, a qual se refletirá na amplitude do movimento do solo no local de observação.

De acordo com o observado, tais curvas são paralelas quando considerados eventos distintos (**Gráfico 7.3**). Esse fato indica que a razão entre duas amplitudes associadas a uma dada distância epicentral nas duas curvas é independente da mesma.

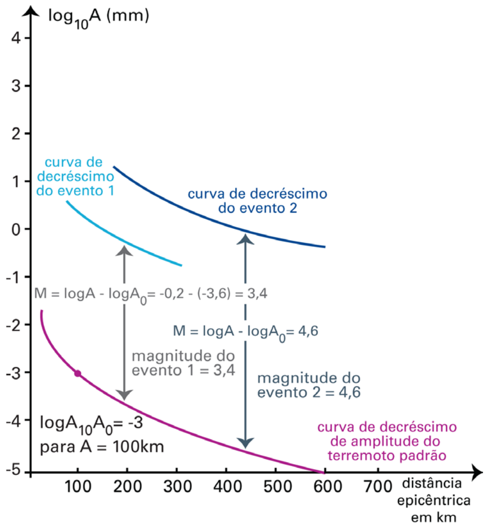


Gráfico 7.3: Amplitude de monitoramento do solo.

Richter considerou, então, uma curva de atenuação teórica, a qual seria associada a um ponto cuja distância epicentral seria de 100 km. A essa curva foi dado o nome de curva padrão.

A magnitude de um terremoto na escala Richter, indicada por M, de um sismo, é dada pela diferença dos valores das curvas de atenuação, ou seja, a diferença entre o valor do logaritmo da amplitude A associado ao sismo e aquele associado ao valor da curva padrão, A_0, para o mesmo valor da distância epicentral.

Escrevemos assim:

$$M = \log_{10} A - \log_{10} A_0 \tag{7.27}$$

A energia liberada num terremoto (intimamente associada ao seu poder de destruição) pode ser escrita, em função da amplitude A, aproximadamente, como:

$$E = CA^{3/2} \tag{7.28}$$

onde C é uma constante. Assim, uma diferença de 2 graus na escala Richter implica um aumento da energia liberada por um fator 1.000 e isso porque:

$$1.000 = (10^2)^{3/2} \tag{7.29}$$

7.4.2 O pH

É sempre possível encontrar íons de Hidrogênio numa solução aquosa. O termo será aqui entendido como qualquer íon decorrente da protonização de um elemento ou de uma molécula. A água pode ser protonizada, dando lugar ao hidrônio H_3O^+.

Consideremos o caso da própria água. Na água pura é possível encontrar a molécula da água como aceitadora de prótons (o seu lado ácido), bem como doadora de prótons (nesse caso, exibe o seu lado base). Isso decorre da reação:

$$H_2O + H_2O \to H_3O^+ + OH^- \qquad 7.30$$

A reação acima é bastante rara, uma vez que apenas uma molécula em cada 550.000.000 de moléculas da água é ionizada a cada instante de tempo considerado. O fato é que a concentração de qualquer um dos íons é muito baixa. A concentração de qualquer um deles é dada por:

$$10^{-7}\,\text{mol/litro} = 10^{-7}\,\text{M} \qquad 7.31$$

Assim, se tomarmos o negativo do logaritmo na base 10 do valor da concentração do íon H_3O na unidade acima, obteremos:

$$-\log C_{H_3O^+} = 7 \qquad 7.32$$

O pH de uma solução aquosa é definido pela concentração de hidrônios nessa solução:

$$\text{pH} = -\log C_{H_3O^+} \qquad 7.33$$

Tendo em vista a igualdade dos dois tipos de íons na água, dizemos que ela, com o pH igual a 7, é neutra. Soluções aquosas com o valor de pH abaixo desse valor são denominadas soluções ácidas. Aquelas com o pH acima desse valor são denominadas soluções alcalinas (ou básicas).

7.5 Física Estatística

A função exponencial é de grande importância na física estatística. Para entender isso, lembramos que o postulado fundamental da mecânica estatística é o que assume que a ocupação de qualquer microestado acessível a um sistema físico é igualmente provável. Escrevemos, portanto, para qualquer microestado, a seguinte expressão que representa a probabilidade de encontrá-lo:

$$P = \frac{1}{N} \tag{7.34}$$

onde N é o número de microestados acessíveis ao sistema físico considerado.

A entropia de um sistema é proporcional ao logaritmo natural do número de estados, ou seja:

$$S = k \ln N \tag{7.35}$$

onde a constante k é a constante de Boltzmann. Da expressão acima, resulta que o número de estados acessíveis é dado por:

$$N = e^{\frac{S}{k}} \tag{7.36}$$

E, portanto, a probabilidade de encontrarmos o sistema num dos seus possíveis microestados é:

$$P = e^{-\frac{S}{k}} \tag{7.37}$$

o que dá à entropia uma interpretação probabilística. Assumimos que o volume, o número de moléculas ou constituintes, bem como a sua energia, são fixos.

Dentro do contexto do Ensemble Canônico, onde há a hipótese de a energia não ser fixa, postulamos que num sistema, que se encontra imerso num banho térmico a uma temperatura(T), a probabilidade de o encontrarmos com uma energia E é dada pela expressão:

$$P(E) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E}{kT}} \tag{7.38}$$

onde Z pode ser determinado a partir da condição de que a soma das probabilidades seja igual a 1.

7.6 Distribuição de moléculas na atmosfera terrestre

Os átomos (ou moléculas) num gás não têm a mesma velocidade; assim, o que importa não é a velocidade ou a energia cinética unitária de cada átomo (ou molécula), uma vez que não há como medi-la. Podemos, no entanto, determinar os valores médios da velocidade e de outras grandezas físicas, como fizeram Maxwell e Boltzmann. A teoria de Maxwell-Boltzmann é baseada em métodos estatísticos.

Para um sistema de partículas, a energia a que se refere a expressão **7.38** é a soma da energia cinética e a energia potencial (U). No caso de uma partícula de massa m sujeita a um campo gravitacional constante de intensidade g, a energia é dada por

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgz \tag{7.39}$$

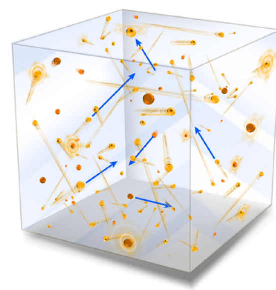


Figura 7.4: Moléculas num gás têm diferentes velocidades.

Sem considerar a questão da velocidade das moléculas dos gases que compõem a atmosfera terrestre, podemos inferir que a densidade de um gás cujas moléculas têm massa m, e admitindo-se a temperatura constante e igual a T, depende exponencialmente da altura h em relação à superfície terrestre. Escrevemos:

$$\rho(h) = \rho_0 e^{\frac{-mgh}{kT}} \tag{7.40}$$

Essa distribuição é conhecida como distribuição barométrica.

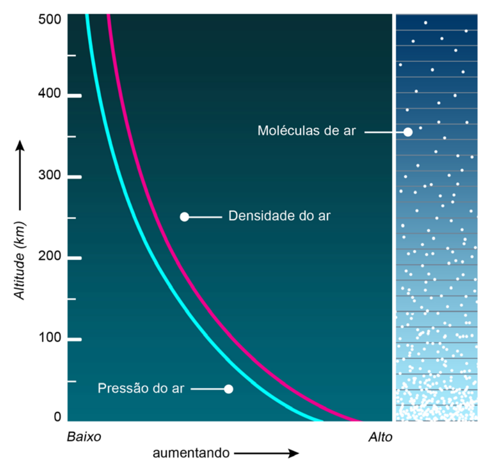


Gráfico 7.4: Distribuição barométrica.

7.7 Distribuição de velocidade de moléculas num gás

Fazendo uso da estatística de Maxwell-Boltzmann, podemos inferir a probabilidade de encontrarmos um certo número, dN, de partículas com velocidades no intervalo entre v e $v + dv$. Assim, a teoria prevê que a distribuição de velocidades das moléculas que compõem um gás rarefeito contendo N moléculas de massa m é dada, em função da temperatura T, pela expressão:

$$\boxed{dN(v,T) = f(v,T)\,dv} \tag{7.41}$$

onde a função f é denominada função de distribuição e, de acordo com a estatística de Maxwell-Boltzmann, ela é dada por:

$$\boxed{f(v,T) = N\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT}\,v^2} \tag{7.42}$$

onde K é a constante de Boltzmann, cujo valor é $1.38 \times 10^{-23} J{\cdot}T^{-1}$.

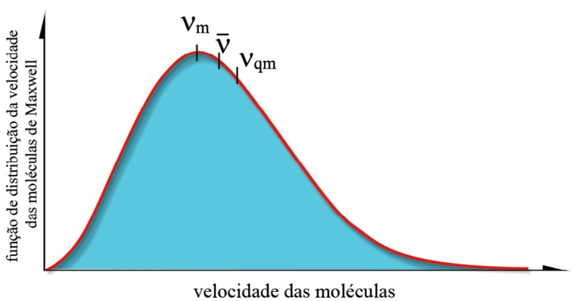


Gráfico 7.5: Velocidade mais provável, média e quadrática média.

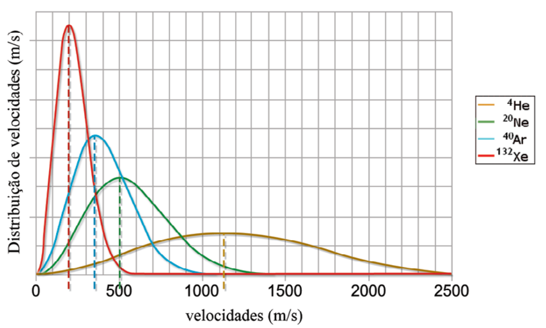


Gráfico 7.6: Distribuição da velocidade molecular de Maxwell-Boltzmann para diferentes gases.

De posse do tratamento estatístico de um grande número de moléculas, a teoria atômica permite fazer previsões relativamente simples a respeito do comportamento dos gases ideais. Por exemplo, o valor mais provável da velocidade é aquele para o qual a distribuição atinge o valor máximo. A velocidade mais provável das moléculas depende da temperatura da seguinte forma:

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \tag{7.43}$$

A média da velocidade ao quadrado:

$$\left\langle v^2 \right\rangle = \int_0^{+\infty} dv v^2 f\left(v,T\right) = N4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} dv v^4 e^{-mv^2/2kT} \quad 7.44$$

é dada pela expressão:

$$\left(v^2\right) = \frac{3kT}{m} = v^2{}_{qm} \quad 7.45$$

enquanto a energia média, para um gás ideal, é igual à energia cinética média. De cada molécula é dada, de acordo com **7.45**, pela expressão:

$$\left\langle E \right\rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3kT}{2} \quad 7.46$$

Através da expressão acima, a teoria cinética associa a temperatura à energia interna do gás, ou seja, associamos a temperatura ao estado de movimento dos constituintes.

Através de expressões como **7.43** ou **7.45,** a teoria cinética permite inferir valores para a velocidade das moléculas. Por exemplo, a velocidade mais provável das moléculas de hidrogênio num gás mantido a uma temperatura de 100 graus K é de 910 m/s.

7.8 Movimento num fluido viscoso

No segundo volume dos *Principia*, Newton discute o movimento de um corpo quando imerso num fluido viscoso. No início do volume II, ele enuncia o tema a ser estudado:

SECTION I.

Of the motion of bodies that are resisted in the radio of the velocity.

Figura 7.5: Título no segundo volume dos *Principia*.

ou seja, analisa, logo no início do seu segundo livro, o caso de uma força proporcional à velocidade.

Consideremos o caso de um barco na água. Ao desligarmos o motor de popa, ele para depois de um determinado tempo, tempo esse que depende da velocidade inicial.

Sobre um objeto em movimento num fluido, como um barco, atua uma força decorrente das colisões do objeto com as moléculas que compõem o fluido. Admitiremos que essa força seja da forma:

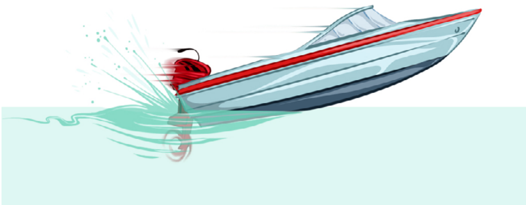


Figura 7.6: Ilustração de um barco em movimento.

$$F = -bV \qquad 7.47$$

onde o coeficiente b depende da viscosidade do fluido e da forma geométrica do objeto nele imerso. O sinal menos na expressão acima significa apenas que a força é contrária ao movimento, ou seja, ela tem o sentido contrário ao sentido do movimento, o qual tem o sentido da velocidade, pois, como sabemos, a velocidade sempre indica para onde a partícula vai logo em seguida. O sinal menos indica que essa força atua sempre de modo a impedir o movimento.

Consideraremos apenas o caso do movimento numa direção. No primeiro exemplo, consideraremos o caso de um objeto que se movimenta num fluido de tal forma que não existam outras forças, além da força viscosa agindo na direção do movimento. Admitiremos que a força depende linearmente da velocidade.

Um bom exemplo dessa situação é o de um barco que, a partir de um determinado momento, desliga o motor. No caso, temos várias forças agindo sobre ele. Na direção normal à superfície do lago agem duas forças. A força peso é equilibrada pela força de empuxo. Na direção tangencial temos apenas a força decorrente das colisões do barco com as partículas que compõem o fluido. Assim, nessa direção – a tangencial, temos a equação de Newton escrita como:

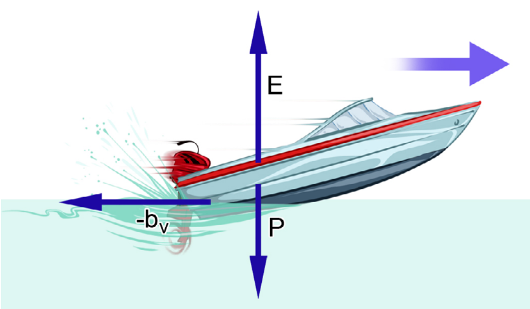


Figura 7.7: Representação das forças que agem sobre o barco.

$$m\frac{dV(t)}{dt} = -bV(t) \qquad 7.48$$

A solução para a equação acima é:

$$V(t) = V(t_0)e^{-\gamma(t-t_0)} \qquad 7.49$$

onde

$$\gamma = \frac{b}{m} \tag{7.50}$$

De **7.49** infere-se que a velocidade do barco decresce exponencialmente com o tempo. A posição do móvel varia como uma função decrescente do tempo de acordo com a expressão:

$$x(t) = x(t_0) - \frac{V_0}{\gamma}\left(e^{-\gamma(t-t_0)} - 1\right) \tag{7.51}$$

A conclusão é a de que o barco percorre uma distância

$$\Delta x(t) = \frac{V_0}{\gamma} \tag{7.52}$$

até ele parar.

Consideremos agora outro exemplo. Uma pequena esfera é colocada no interior de um fluido viscoso. No início, ela adquire uma aceleração, mas depois de um intervalo de tempo verificamos que a sua velocidade assume um valor constante. Ela para de acelerar.

O mesmo comportamento, de objetos que, ao caírem, adquirem velocidade constante, vale para qualquer fluido. Assim, também, objetos que caem na superfície da Terra exibem o mesmo comportamento.

No caso em apreço devemos adicionar a força gravitacional à expressão **7.48**. Obtemos assim:

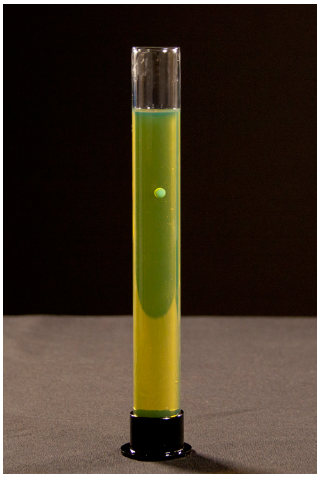


Figura 7.8: Pequena esfera no interior de um fluido viscoso.

$$m\frac{dv}{dt} = -bV(t) + mg \tag{7.53}$$

A solução para a velocidade em função da velocidade inicial (no caso em que a esfera é solta, essa velocidade é nula);

$$V_y(t) = -\left(\frac{g}{\gamma}\right) + \left(V_y(t_0) + \left(\frac{g}{\gamma}\right)\right)e^{-\gamma(t-t_0)} \tag{7.54}$$

A primeira conclusão a que chegamos é a de que, independentemente do valor da velocidade inicial, a partícula atinge uma velocidade final, que é constante, e que é dada por:

$$V_y(\text{final}) = -\left(\frac{g}{\gamma}\right) \qquad 7.55$$

Observamos que essa velocidade final é exatamente aquela para a qual a força exercida pelo líquido se torna igual à força gravitacional. De fato, de **7.53**, vemos que

$$-bV_y(\text{final}) - mg = 0 \qquad 7.56$$

Assim, na atmosfera terrestre (um fluido viscoso), a velocidade de um objeto que cai cresce até atingir um determinado valor. A partir desse valor, ela fica praticamente constante, uma vez que o termo da velocidade que depende do tempo decresce exponencialmente.

7.9 Corrente elétrica num circuito RC

Um circuito é uma interconexão de elementos elétricos (ou dispositivos) formando um caminho fechado de tal forma que uma corrente elétrica possa fluir por esse caminho. Na **Figura 7.9** apresentamos o exemplo mais simples de um circuito RC. Trata-se de um circuito que contém apenas um capacitor, cuja capacitância é C e um resistor, cuja resistência é R. Nesse caso, eles se encontram dispostos em série.

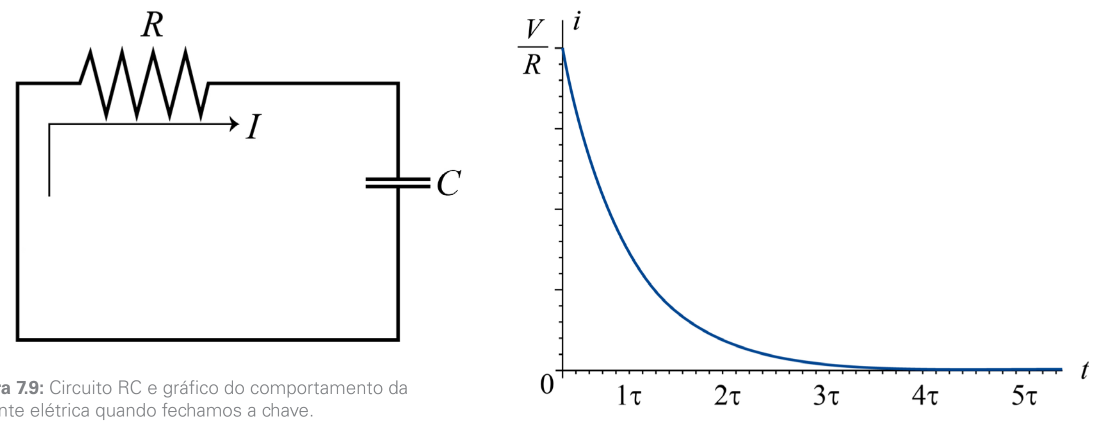


Figura 7.9: Circuito RC e gráfico do comportamento da corrente elétrica quando fechamos a chave.

Levando-se em conta a lei de Kirchoff, ao ligarmos a chave, veremos que a diferença de potencial entre as placas do capacitor obedece a uma lei equivalente a um decaimento exponencial, ou seja:

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{7.57}$$

onde V_0 é a diferença de potencial do capacitor no instante em que acionamos a chave (o instante de tempo $t = 0$). A corrente elétrica obedece, igualmente, a uma lei do decaimento exponencial. Obtemos:

$$i(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \tag{7.58}$$

Nesse caso, o decaimento exponencial resulta da perda de energia dos elétrons ao se movimentarem pelo resistor. De fato, lembrando que a energia armazenada no capacitor é dada por

$$E = \frac{1}{2} C V^2 \tag{7.59}$$

Constatamos que essa energia decresce exponencialmente:

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{2t}{RC}} = \frac{1}{2} C V_0^{\,2} e^{-\frac{2t}{RC}} \tag{7.60}$$

onde E_0 é a energia armazenada inicialmente no capacitor. Essa energia é perdida nas colisões dos elétrons com os átomos constituintes do resistor. A taxa de perda de energia, por unidade de tempo, é a potência dissipada. E esta decai exponencialmente. E isso segue do fato de que a potência dissipada numa resistência é dada por:

$$P = Ri^2 \tag{7.61}$$

De **7.58** e **7.61** resulta que:

$$P(t) = \frac{V_0^{\,2}}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} \tag{7.62}$$

7.10 Altura do colarinho da cerveja

O **Gráfico 7.7** corresponde à determinação experimental da altura do colarinho (a altura da espuma no copo) de três marcas diferentes de cerveja como função do tempo. Ao contar o número N de bolhas no colarinho, o Prof. Arnd Leike, da Universidade de München, na Alemanha, constatou que a altura do colarinho, ou mais especificamente o número de bolhas, segue uma lei de decaimento exponencial, ou seja, observou que:

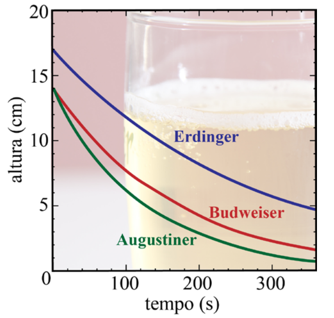


Gráfico 7.7: Comportamento da altura do colarinho da cerveja em função do tempo.

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (7.63)$$

onde N_0 é o número inicial de bolhas.

7.11 Lei de Newton do resfriamento

A **lei de Newton do resfriamento** estabelece que um objeto se resfria obedecendo a uma lei exponencial. Isso decorre do fato de que ele perde calor a uma taxa que é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e os objetos na sua vizinhança e da hipótese de que o calor perdido seja proporcional à temperatura do corpo.

Figura 7.10: Esquema representando um objeto em contato com o ambiente e seu resfriamento em relação ao tempo.

Isso pode ser verificado experimentalmente de acordo com o arranjo da **Figura 7.10**. O que se procura determinar é a diferença $\Delta T = T - T_{amb}$ entre a temperatura do objeto e a do ambiente no qual ele está imerso.

Assim, de acordo com a lei do resfriamento de Newton,

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-\lambda t} \quad (7.64)$$

onde ΔT_0 é a diferença de temperatura no instante de tempo $t = 0$.

Glossário

Radioisótopo: Um isótopo de um elemento radioativo.