Caso 6: $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\, du$ ou $\int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\, du$, onde m é um inteiro par positivo e n é um inteiro ímpar positivo.

O integrando pode ser expresso em termos de potências ímpares de secante ou co-secante. Por exemplo,

$$\int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x\, dx$$
$$= \int \sec^5 x\, dx - \int \sec^3 x\, dx$$

Para calcular cada uma dessas integrais usamos integração por partes, conforme foi indicado no Caso 3.

EXERCÍCIOS 9.3

Nos Exercícios de 1 a 30, calcule a integral indefinida.

1. $\int \operatorname{tg}^2 5x\, dx$
2. $\int \operatorname{cotg}^2 4t\, dt$
3. $\int x \operatorname{cotg}^2 2x^2\, dx$
4. $\int e^x \operatorname{tg}^2(e^x)\, dx$
5. $\int \operatorname{cotg}^3 t\, dt$
6. $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$
7. $\int \operatorname{tg}^6 3x\, dx$
8. $\int \operatorname{cotg}^5 2x\, dx$
9. $\int \sec^4 x\, dx$
10. $\int \operatorname{cosec}^4 x\, dx$
11. $\int \operatorname{cosec}^3 x\, dx$
12. $\int \sec^5 x\, dx$
13. $\int e^x \operatorname{tg}^4(e^x)\, dx$
14. $\int \frac{\sec^4(\ln x)}{x}\, dx$
15. $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x\, dx$
16. $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^3 x\, dx$
17. $\int \operatorname{cotg}^2 3x \operatorname{cosec}^4 3x\, dx$
18. $\int (\sec 5x + \operatorname{cosec} 5x)^2\, dx$
19. $\int (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 2x)^2\, dx$
20. $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$
21. $\int \frac{2 \operatorname{sen} w - 1}{\cos^2 w}\, dw$
22. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$
23. $\int \operatorname{tg}^5 3x\, dx$
24. $\int \frac{\operatorname{tg}^4 y}{\sec^5 y}\, dy$
25. $\int \frac{du}{1 + \sec \frac{1}{2}u}$
26. $\int \frac{\operatorname{cosec}^4 x}{\operatorname{cotg}^2 x}\, dx$
27. $\int \frac{\sec^3 x}{\operatorname{tg}^4 x}\, dx$
28. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 \pi x}{\cos^6 \pi x}\, dx$
29. $\int \frac{\operatorname{tg}^3(\ln x) \sec^6(\ln x)}{x}\, dx$
30. $\int \frac{\sec^4 w}{\sqrt{\operatorname{tg} w}}\, dw$

Nos Exercícios de 31 a 36, calcule a integral definida.

31. $\int_{\pi/16}^{\pi/12} \operatorname{tg}^3 4x\, dx$
32. $\int_{\pi/8}^{\pi/6} 3 \sec^4 2t\, dt$
33. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^6 x\, dx$
34. $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\sec x}\, dx$
35. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^4 t}{\operatorname{sen}^6 t}\, dt$
36. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{cotg}^3 w\, dw$
37. Ache a área da região limitada pela curva $y = \operatorname{tg}^2 x$, pelo eixo x e pela reta $x = \frac{1}{4}\pi$.
38. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = 3 \operatorname{cosec}^3 x$, pelo eixo x e pelas retas $x = \frac{1}{6}\pi$ e $x = \frac{1}{2}\pi$ em torno do eixo x.
39. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = \sec^2 x$, pelos eixos e pela reta $x = \frac{1}{4}\pi$ em torno do eixo x.
40. Prove: $\int \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec}^n x\, dx = -\frac{\operatorname{cosec}^n x}{n} + C$, se $n \neq 0$.
41. Prove: $\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx$, se n for um inteiro positivo maior do que 1.
42. Deduza uma fórmula similar àquela do Exercício 40 para $\int \operatorname{tg} x \sec^n x\, dx$, se $n \neq 0$.
43. Deduza uma fórmula similar àquela do Exercício 41 para $\int \operatorname{cotg}^n x\, dx$, se n for um inteiro positivo maior do que 1.

9.4 INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Se o integrando contiver expressões do tipo $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$, ou $\sqrt{u^2 - a^2}$, onde $a > 0$, em geral é possível efetuar a integração através de uma substituição trigonométrica que levará a uma integral envolvendo funções trigonométricas. Vamos considerar cada forma como um caso separado.

Caso 1: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, onde $a > 0$.

Vamos introduzir uma nova variável θ tomando $u = a \operatorname{sen} \theta$, onde

$$0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant 0 \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqslant \theta < 0 \quad \text{se } u < 0$$

Então $du = a \cos \theta \, d\theta$, e

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} \\ &= a\sqrt{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

Como $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, $\cos \theta \geqslant 0$. Então $\sqrt{\cos^2 \theta} = \cos \theta$, e

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$$

Como $\operatorname{sen} \theta = u/a$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$,

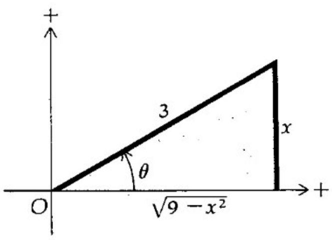
$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a}$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} \, dx$$

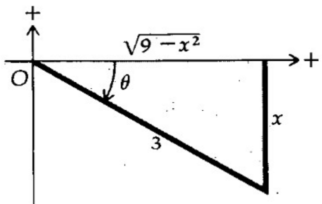
Solução Seja $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, onde $0 < \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$ se $x > 0$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta < 0$ se $x < 0$. Então $dx = 3 \cos \theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned} \sqrt{9 - x^2} &= \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= 3\sqrt{\cos^2 \theta} \\ &= 3 \cos \theta \end{aligned}$$



$x > 0$

FIGURA 1



$x < 0$

FIGURA 2

Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} \, dx &= \int \frac{3 \cos \theta}{9 \operatorname{sen}^2 \theta} (3 \cos \theta \, d\theta) \\ &= \int \operatorname{cotg}^2 \theta \, d\theta \\ &= \int (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1) \, d\theta \\ &= -\operatorname{cotg} \theta - \theta + C \end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}x$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{3}x$. Para encontrar $\operatorname{cotg} \theta$, consulte as Figuras 1 (para $x > 0$) e 2 (para $x < 0$). Observe que em ambos os casos $\operatorname{cotg} \theta = \sqrt{9 - x^2}/x$. Logo,

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} \, dx = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{3} + C$$

Caso 2: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, onde $a > 0$. Introduzimos uma nova variável θ fazendo $u = a \operatorname{tg} \theta$, onde

$$0 \leqslant \theta < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant 0 \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < 0 \quad \text{se } u < 0$$

Então $du = a \sec^2 \theta \, d\theta$, e

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + u^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \\ &= a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \\ &= a\sqrt{\sec^2 \theta}\end{aligned}$$

Como $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, $\sec \theta \geqslant 1$. Assim $\sqrt{\sec^2 \theta} = \sec \theta$, e

$$\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta$$

Como $\operatorname{tg} \theta = u/a$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$,

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{u}{a}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \sqrt{x^2 + 5}\, dx$$

Solução Substituímos $x = \sqrt{5} \operatorname{tg} \theta$, onde $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x \geqslant 0$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 0$. Então $dx = \sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 5} &= \sqrt{5 \operatorname{tg}^2 \theta + 5} \\ &= \sqrt{5}\sqrt{\sec^2 \theta} \\ &= \sqrt{5} \sec \theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + 5}\, dx &= \int \sqrt{5} \sec \theta (\sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta) \\ &= 5 \int \sec^3 \theta \, d\theta\end{aligned}$$

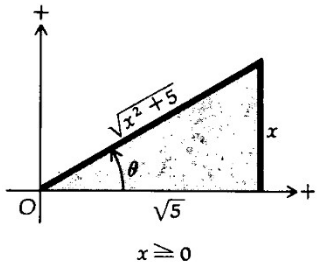


FIGURA 3

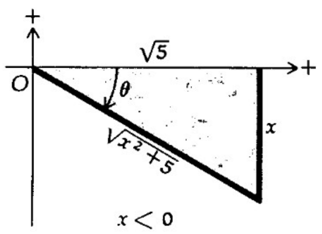


FIGURA 4

Usando o resultado do Exemplo 4 da Secção 9.3, temos

$$\int \sqrt{x^2 + 5}\, dx = \tfrac{5}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \tfrac{5}{2} \ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C$$

Determinamos $\sec \theta$ das Figuras 3 (para $x \geqslant 0$) e 4 (para $x < 0$), onde $\operatorname{tg} \theta = x/\sqrt{5}$. Em ambos os casos vemos que $\sec \theta = \sqrt{x^2 + 5}/\sqrt{5}$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + 5}\, dx &= \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}} \right| + C \\ &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 5} + \tfrac{5}{2} \ln|\sqrt{x^2 + 5} + x| - \tfrac{5}{2} \ln \sqrt{5} + C \\ &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 5} + \tfrac{5}{2} \ln(\sqrt{x^2 + 5} + x) + C_1\end{aligned}$$

Observe que substituímos $-\frac{5}{2} \ln \sqrt{5} + C$ pela constante arbitrária C_1. Além disso, como $\sqrt{x^2 + 5} + x > 0$, retiramos as barras de valor absoluto.

Caso 3: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{u^2 - a^2}$, onde $a > 0$. Introduzimos uma nova variável fazendo $u = a \sec \theta$, onde

$$0 \leqslant \theta < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant a \quad \text{e} \quad \pi \leqslant \theta < \tfrac{3}{2}\pi \quad \text{se } u \leqslant -a$$

Então $du = a \sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{u^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2\theta - a^2}\\ &= \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)}\\ &= a\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta}\end{aligned}$$

Como $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$ ou $\pi \leqslant \theta < \frac{3}{2}\pi$, $\operatorname{tg}\theta \geqslant 0$. Assim, $\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta} = \operatorname{tg}\theta$, e temos

$$\sqrt{u^2 - a^2} = a \operatorname{tg}\theta$$

Como $\sec\theta = u/a$ e θ está em $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$,

$$\theta = \sec^{-1}\frac{u}{a}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 9}}$$

Solução Seja $x = 3\sec\theta$, onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 3$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -3$. Então $dx = 3\sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 9} &= \sqrt{9\sec^2\theta - 9}\\ &= 3\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta}\\ &= 3\operatorname{tg}\theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 9}} &= \int \frac{3\sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta}{27\sec^3\theta \cdot 3\operatorname{tg}\theta}\\ &= \tfrac{1}{27}\int \cos^2\theta \, d\theta\\ &= \tfrac{1}{54}\int (1 + \cos 2\theta)\, d\theta\\ &= \tfrac{1}{54}(\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta) + C\\ &= \tfrac{1}{54}(\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\theta) + C\end{aligned}$$

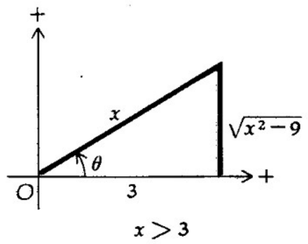


FIGURA 5

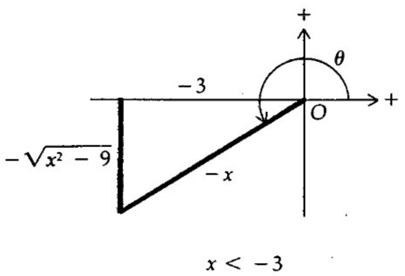


FIGURA 6

Como $\sec\theta = \frac{1}{3}x$ e θ está em $(0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $\theta = \sec^{-1}\frac{1}{3}x$. Quando $x > 3$, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, e obtemos $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ da Figura 5. Quando $x < -3$, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$, e obtemos $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ da Figura 6. Em ambos os casos $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{x^2 - 9}/x$ e $\cos\theta = 3/x$. Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 9}} &= \frac{1}{54}\left(\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\cdot\frac{3}{x}\right) + C\\ &= \frac{1}{54}\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{18x^2} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$$

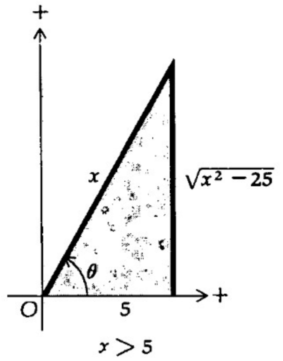


FIGURA 7

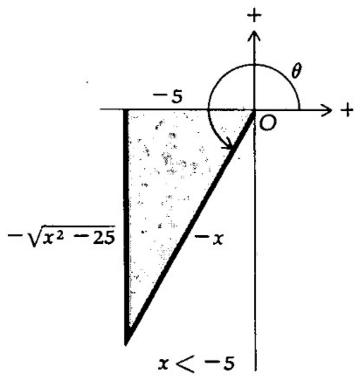


FIGURA 8

Solução Seja $x = 5 \sec\theta$, onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 5$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -5$. Então $dx = 5 \sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-25} &= \sqrt{25\sec^2\theta - 25}\\ &= 5\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta}\\ &= 5\operatorname{tg}\theta\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} &= \int \frac{5\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta}{5\operatorname{tg}\theta}\\ &= \int \sec\theta\, d\theta\\ &= \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C\end{aligned}$$

Para encontrar $\operatorname{tg}\theta$, consulte a Figura 7 (para $x > 5$) e a Figura 8 (para $x < -5$). Em ambos os casos, $\sec\theta = \frac{1}{5}x$ e $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{5}\sqrt{x^2-25}$. Temos, então,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} &= \ln\left|\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}\right| + C\\ &= \ln|x + \sqrt{x^2-25}| - \ln 5 + C\\ &= \ln|x + \sqrt{x^2-25}| + C_1\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int_1^2 \frac{dx}{(6-x^2)^{3/2}}$$

Solução Para calcular a integral indefinida $\int dx/(6-x^2)^{3/2}$ fazemos a substituição $x = \sqrt{6}\operatorname{sen}\theta$. Nesse caso, podemos restringir θ ao intervalo $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, pois estamos calculando uma integral definida para a qual $x > 0$, uma vez que x está em $[1, 2]$. Assim, $x = \sqrt{6}\operatorname{sen}\theta$, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, e $dx = \sqrt{6}\cos\theta\, d\theta$. Além disso,

$$\begin{aligned}(6-x^2)^{3/2} &= (6 - 6\operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}\\ &= 6\sqrt{6}(1-\operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}\\ &= 6\sqrt{6}(\cos^2\theta)^{3/2}\\ &= 6\sqrt{6}\cos^3\theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(6-x^2)^{3/2}} &= \int \frac{\sqrt{6}\cos\theta\, d\theta}{6\sqrt{6}\cos^3\theta}\\ &= \frac{1}{6}\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\ &= \frac{1}{6}\int \sec^2\theta\, d\theta\\ &= \frac{1}{6}\operatorname{tg}\theta + C\end{aligned}$$

Encontramos tg θ da Figura 9, na qual sen $\theta = x/\sqrt{6}$ e $0 < \theta \frac{1}{2}\pi$. Assim, tg $\theta = x/\sqrt{6 - x^2}$, e portanto

$$\int \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{6\sqrt{6 - x^2}} + C$$

Logo,

$$\int_1^2 \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{6\sqrt{6 - x^2}}\bigg]_1^2$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{5}}{30}$$

$$= \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{5}}{30}$$

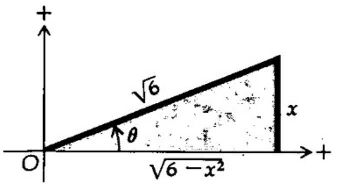


FIGURA 9

EXERCÍCIOS 9.4

Nos Exercícios de 1 a 24, calcule a integral indefinida.

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$
2. $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2}\,dx$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$
4. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2 + 6}}$
5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}}$
6. $\int \sqrt{1 - u^2}\,du$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$
8. $\int \frac{dw}{w^2\sqrt{w^2 - 7}}$
9. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2 + 4)^2}$
10. $\int \frac{dx}{(4 + x^2)^{3/2}}$
11. $\int \frac{dx}{(4x^2 - 9)^{3/2}}$
12. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{16 + x^2}}$
13. $\int \frac{2\,dt}{t\sqrt{t^4 + 25}}$
14. $\int \frac{x^3\,dx}{(25 - x^2)^2}$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x + x^2}}$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$
17. $\int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)^{3/2}}$
18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 - 4}}$
19. $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{(4 - \text{tg}^2\,x)^{3/2}}$
20. $\int \frac{e^{-x}\,dx}{(9e^{-2x} + 1)^{3/2}}$
21. $\int \frac{\ln^3 w\,dw}{w\sqrt{\ln^2 w - 4}}$
22. $\int \frac{dz}{(z^2 - 6z + 18)^{3/2}}$
23. $\int \frac{e^t\,dt}{(e^{2t} + 8e^t + 7)^{3/2}}$
24. $\int \frac{\sqrt{16 - e^{2x}}}{e^x}\,dx$

Nos Exercícios de 25 a 32, calcule a integral definida.

25. $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{16 - x^2}}$
26. $\int_0^4 \frac{dx}{(16 + x^2)^{3/2}}$
27. $\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 9}}$
28. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4 - x^2}}$
29. $\int_4^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}}$
30. $\int_1^3 \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 + 3}}$
31. $\int_0^5 x^2\sqrt{25 - x^2}\,dx$
32. $\int_4^8 \frac{dw}{(w^2 - 4)^{3/2}}$
33. Use os métodos das secções anteriores (isto é, sem substituição trigonométrica) para calcular as integrais:
    (a) $\int \frac{3\,dx}{x\sqrt{4x^2 - 9}}$ (b) $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{3 - 2x^2}}$
34. Ache a área da região limitada pela curva $y = \sqrt{x^2 - 9}/x^2$, pelo eixo x e pela reta $x = 5$.
35. Ache o comprimento do arco da curva $y = \ln x$ entre $x = 1$ e $x = 3$.
36. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 34 em torno do eixo y.
37. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região à direita do eixo y, limitada pela curva $y = x\sqrt[4]{9 - x^2}$ e pelo eixo x, em torno do eixo x.
38. Ache o comprimento do arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.
39. Ache o centro de massa de uma barra com 8 cm se a densidade linear num ponto a x cm do extremo esquerdo é $\rho(x)$ g/cm onde $\rho(x) = \sqrt{x^2 + 36}$.
40. A densidade linear de uma barra num ponto a x m de um extremo é $\sqrt{9 + x^2}$ kg/m. Ache a massa e o centro de massa da barra, sabendo que ela tem 3 m.
41. Ache o centróide da região limitada pela curva $yx^2 = \sqrt{x^2 - 9}$, pelo eixo x e pela reta $x = 5$.