tiplicadores de Lagrange, que são usados para o cálculo de extremos de uma função sujeita a um vínculo.

Os gradientes aparecem novamente na Secção 17.5, onde mostramos como obter uma função a partir de seu gradiente. Esse procedimento é útil para determinar se uma expressão diferencial é *exata* e para resolver *equações diferenciais exatas*.

17.1 DERIVADAS DIRECIONAIS E GRADIENTES

Vamos generalizar a definição de uma derivada parcial, a fim de obter a taxa de variação de uma função em relação a qualquer direção e sentido. Isso nos leva ao conceito de *derivada direcional*.

Seja f uma função de duas variáveis x e y e seja $P(x, y)$ um ponto do plano xy. Suponhamos que $\mathbf{U}$ seja o vetor unitário que faz com a parte positiva do eixo x um ângulo cuja medida em radianos é θ. Então,

$$\mathbf{U} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$$

A Figura 1 mostra a representação de $\mathbf{U}$ com ponto inicial em $P(x, y)$.

17.1.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função de duas variáveis x e y. Se $\mathbf{U}$ for o vetor unitário $\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$, então a **derivada direcional** de f na direção de $\mathbf{U}$, denotada por $D_{\mathbf{U}}f$, será dada por

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h}$$

se o limite existir.

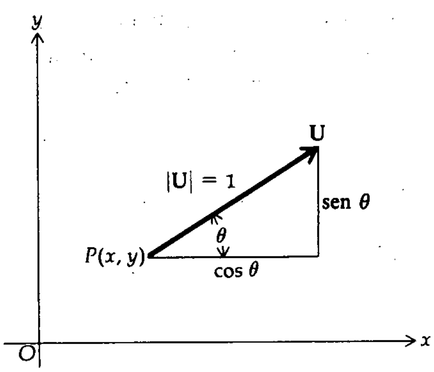

FIGURA 1

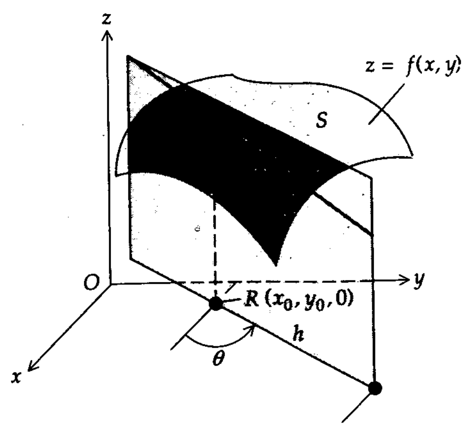

FIGURA 2

A derivada direcional dá a taxa de variação dos valores funcionais $f(x, y)$ em relação à direção e sentido do vetor unitário $\mathbf{U}$.* Isso está ilustrado na Figura 2. Uma equação da superfície S na figura é $z = f(x, y)$. $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto na superfície, e os pontos $R(x_0, y_0, 0)$ e $Q(x_0 + h\cos\theta, y_0 + h\operatorname{sen}\theta, 0)$ são pontos no plano xy. O plano que passa por R e Q, paralelo ao eixo z, faz um ângulo de θ rad com a direção positiva do eixo x. Esse plano intercepta a superfície S na curva C. A derivada direcional $D_{\mathbf{U}}f$, calculada em P_0, é a inclinação da reta tangente à curva C em P_0, no plano de R, Q e P_0.

Se $\mathbf{U} = \mathbf{i}$, então $\cos\theta = 1$ e $\operatorname{sen}\theta = 0$ e, da Definição 17.1.1,

$$D_{\mathbf{i}}f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

que é a derivada parcial de f em relação a x.

Se $\mathbf{U} = \mathbf{j}$, então $\cos\theta = 0$ e $\operatorname{sen}\theta = 1$ e

$$D_{\mathbf{j}}f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

que é a derivada parcial de f em relação a y.

* **N. do R.**: Quando dizemos "derivada de f na direção de $\mathbf{U}$" fica subentendido que, não só a direção mas também o sentido está determinado por $\mathbf{U}$. Observe que $-\mathbf{U}$ tem a mesma direção de $\mathbf{U}$, mas a derivada direcional de f na direção de $-\mathbf{U}$ tem o sinal oposto da derivada de f na direção de $\mathbf{U}$.

Assim sendo, f_x e f_y são casos particulares da derivada direcional nas direções dos vetores unitários **i** e **j**, respectivamente.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos aplicar a Definição 17.1.1 para encontrar $D_{\mathbf{U}}f$, se

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x$$

e **U** é o vetor unitário na direção $\frac{1}{6}\pi$. Então, $\mathbf{U} = \cos\frac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{1}{6}\pi\mathbf{j}$, isto é, $\mathbf{U} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$. Assim, da Definição 17.1.1,

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{U}}f(x, y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}h, y + \frac{1}{2}h) - f(x, y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}h)^2 - (y + \frac{1}{2}h)^2 + 4(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}h) - (3x^2 - y^2 + 4x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2 + 3\sqrt{3}hx + \frac{9}{4}h^2 - y^2 - hy - \frac{1}{4}h^2 + 4x + 2\sqrt{3}h - 3x^2 + y^2 - 4x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3\sqrt{3}hx + \frac{9}{4}h^2 - hy - \frac{1}{4}h^2 + 2\sqrt{3}h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(3\sqrt{3}x + \tfrac{9}{4}h - y - \tfrac{1}{4}h + 2\sqrt{3})\\
&= 3\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

◀

Seguimos agora para obter uma fórmula que nos possibilite calcular a derivada direcional de uma maneira mais rápida do que se usarmos a definição. Seja g a função de uma única variável t, com x, y e θ fixos, tal que

$$g(t) = f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta) \tag{1}$$

e seja $\mathbf{U} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$. Então, pela definição de derivada ordinária,

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + (0 + h)\cos\theta, y + (0 + h)\operatorname{sen}\theta) - f(x + 0\cos\theta, y + 0\operatorname{sen}\theta)}{h}$$

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h}$$

Como o segundo membro acima é $D_{\mathbf{U}}f(x, y)$,

$$g'(0) = D_{\mathbf{U}}f(x, y) \tag{2}$$

Encontramos agora $g'(t)$, aplicando a regra da cadeia ao segundo membro de (1), o que dá

$$\begin{aligned}
g'(t) &= f_1(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial(x + t\cos\theta)}{\partial t} + f_2(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial(y + t\operatorname{sen}\theta)}{\partial t}\\
&= f_1(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + f_2(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta
\end{aligned}$$

Logo,

$$g'(0) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta$$

Dessa equação e de (2) obtemos o teorema a seguir.

17.1.2 TEOREMA Se f for uma função diferenciável de x e y e $\mathbf{U} = \cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j}$, então

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\,\text{sen}\,\theta$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Aplicamos a Definição 17.1.2 para calcular $D_{\mathbf{U}}f$ para a função f e o vetor unitário $\mathbf{U}$ da Ilustração 1:

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x \qquad \mathbf{U} = \cos\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \text{sen}\,\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{U}}f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\tfrac{1}{6}\pi + f_y(x, y)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{6}\pi \\ &= (6x + 4)\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + (-2y)\tfrac{1}{2} \\ &= 3\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

o que está de acordo com o resultado da Ilustração 1. ◀

A derivada direcional pode ser escrita como um produto escalar de dois vetores. Uma vez que

$$f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\,\text{sen}\,\theta = (\cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}]$$

segue do Teorema 17.1.2 que

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = (\cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \tag{3}$$

O segundo vetor do segundo membro de (3) é muito importante e é chamado de *gradiente* da função f. O símbolo usado para o gradiente de f e ∇f, onde ∇ é delta maiúsculo invertido e lê-se "del". Algumas vezes a abreviação *grad f* é usada.

17.1.3 DEFINIÇÃO Se f for uma função de duas variáveis x e y, e f_x e f_y existirem, então o **gradiente** de f, denotado por ∇f (leia "del f"), será definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

Da Definição 17.1.3, a equação (3) pode ser escrita como

$$\boxed{D_{\mathbf{U}}f(x, y) = \mathbf{U} \cdot \nabla f(x, y)} \tag{4}$$

Assim sendo, qualquer derivada direcional de uma função diferenciável pode ser obtida se multiplicarmos escalarmente o gradiente pelo vetor unitário na direção e sentido desejados.

EXEMPLO 1 Se

$$f(x, y) = \tfrac{1}{16}x^2 + \tfrac{1}{9}y^2$$

ache o gradiente e f no ponto (4, 3). Ache também a taxa de variação de $f(x, y)$ na direção $\frac{1}{4}\pi$ em (4, 3).

Solução Como $f_x(x, y) = \frac{1}{8}\pi$ e $f_y(x, y) = \frac{2}{9}y$,

$$\nabla f(x, y) = \tfrac{1}{8}x\mathbf{i} + \tfrac{2}{9}y\mathbf{j} \qquad \nabla f(4, 3) = \tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j}$$

A taxa de variação de $f(x, y)$ na direção $\frac{1}{4}\pi$ em (4, 3) é $D_{\mathbf{U}}f(4, 3)$, onde

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

Encontramos $D_{\mathbf{U}}f(4, 3)$ multiplicando escalarmente $\nabla f(4, 3)$ por $\mathbf{U}$.

$$D_{\mathbf{U}}f(4, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}\right)$$
$$= \frac{7}{6\sqrt{2}}$$

Se α for a medida em radianos do ângulo entre os dois vetores $\mathbf{U}$ e ∇f, então

$$\mathbf{U} \cdot \nabla f(x, y) = \|\mathbf{U}\| \|\nabla f(x, y)\| \cos \alpha$$

Dessa equação e de (4), segue que

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = \|\mathbf{U}\| \|\nabla f(x, y)\| \cos \alpha \qquad (5)$$

Vemos de (5) que $D_{\mathbf{U}}f$ será máxima quando $\cos \alpha = 1$, isto é, quando $\mathbf{U}$ estiver na direção e sentido de ∇f; e nesse caso $D_{\mathbf{U}}f = \|\nabla f\|$. Assim sendo, o gradiente de uma função está na direção e sentido em que a função tem a taxa máxima de variação. Em particular, num mapa topográfico bidimensional de um terreno onde z unidades é a elevação num ponto (x, y) e $z = f(x, y)$, a direção e sentido em que a taxa de variação é máxima serão dados por $\nabla f(x, y)$; isto é, o vetor $\nabla f(x, y)$ aponta para cima na direção e sentido mais íngremes. Isso explica a denominação *gradiente* (a inclinação é mais acentuada na direção do gradiente).

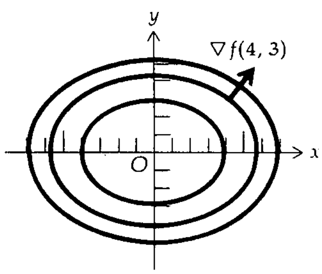

FIGURA 3

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Na Figura 3 há um mapa topográfico mostrando as curvas de nível da função do Exemplo 1 em 1, 2 e 3. As curvas de nível são elipses. A figura também mostra a representação de $\nabla f(4, 3)$, tendo $(4, 3)$ como ponto inicial. ◀

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 3x - y$$

ache o valor máximo de $D_{\mathbf{U}}f$ no ponto onde $x = 1$ e $y = -2$.

Solução Como $f_x(x, y) = 4x + 3$ e $f_y(x, y) = -2y - 1$,

$$\nabla f(x, y) = (4x + 3)\mathbf{i} + (-2y - 1)\mathbf{j} \qquad \nabla f(1, -2) = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Assim, o valor máximo de $D_{\mathbf{U}}f$ no ponto $(1, -2)$ é

$$\|\nabla f(1, -2)\| = \sqrt{49 + 9}$$
$$= \sqrt{58}$$

EXEMPLO 3 A temperatura em cada ponto (x, y) de uma placa retangular situada no plano xy, é determinada por

$$T(x, y) = x^2 + y^2$$

a) Ache a taxa de variação da temperatura no ponto $(3, 4)$ na direção e sentido que fazem um ângulo de $\frac{1}{3}\pi$ rad com o eixo x positivo. (b) Ache a direção e sentido em que a taxa de variação da temperatura no ponto $(-3, 1)$ é máxima.

Solução

a) Queremos encontrar $D_U T(x, y)$ onde

$$\mathbf{U} = \cos \tfrac{1}{3}\pi \mathbf{i} + \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi \mathbf{j} = \tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j} \qquad \nabla T(x, y) = T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_U T(x, y) &= \mathbf{U} \cdot \nabla T(x, y) \\ &= (\tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}) \\ &= x + \sqrt{3}y \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} D_U T(3, 4) &= 3 + 4\sqrt{3} \\ &\approx 9{,}93 \end{aligned}$$

Então, em (3, 4) a temperatura está aumentando à taxa de aproximadamente 9,93 unidades por unidade de variação medido na direção e sentido de **U**.

b) $D_U T(-3, 1)$ será um máximo quando **U** estiver na direção e sentido de $\nabla T(-3, 1)$. Como $\nabla T(-3, 1) = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, a medida em radianos do ângulo que dá a direção e o sentido de $\nabla T(-3, 1)$ é θ, onde $\operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{3}$. Assim, $\theta = \pi - \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3}$. Logo, a taxa de variação da temperatura no ponto $(-3, 1)$ é máxima quando tomada na direção e sentido que fazem um ângulo de $\pi - \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3}$ rad com o eixo x positivo.

Vamos agora estender para uma função de três variáveis a definição de derivada direcional. No espaço tridimensional a direção e o sentido de um vetor são determinados pelos seus co-senos diretores. Se $\cos \alpha$, $\cos \beta$ e $\cos \gamma$ forem os co-senos diretores do vetor unitário **U**, então $\mathbf{U} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$.

17.1.4 DEFINIÇÃO

Suponha que f seja uma fração de três variáveis x, y e z. Se **U** for o vetor unitário $\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$, então a **derivada direcional** de f na direção de **U**, denotada por $D_U f$, será dada por

$$D_U f(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cos \alpha, y + h \cos \beta, z + h \cos \gamma) - f(x, y, z)}{h}$$

se este limite existir.

A derivada direcional de uma função de três variáveis dá a taxa de variação dos valores funcionais $f(x, y, z)$ em relação à distância no espaço tridimencional, medida na direção e sentido do vetor unitário **U**.

O teorema a seguir, que fornece um método de cálculo da derivada direcional de uma função de três variáveis é demonstrado de forma análoga ao Teorema 17.1.12.

17.1.5 TEOREMA

Se f for uma função diferenciável de x, y e z e

$$\mathbf{U} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

então

$$D_U f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \cos \alpha + f_y(x, y, z) \cos \beta + f_z(x, y, z) \cos \gamma$$

EXEMPLO 4 Dada

$$f(x, y, z) = 3x^2 + xy - 2y^2 - yz + z^2$$

ache a taxa de variação de $f(x, y, z)$ em $(1, -2, -1)$ na direção e sentido do vetor $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solução O vetor unitário na direção e sentido de $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é

$$\mathbf{U} = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}$$

Assim, do Teorema 17.1.5

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = \tfrac{2}{3}(6x + y) - \tfrac{2}{3}(x - 4y - z) - \tfrac{1}{3}(-y + 2z)$$

Logo, a taxa de variação de $f(x, y, z)$ em $(1, -2, -1)$ na direção e sentido de $\mathbf{U}$, é dada por

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{U}}f(1, -2, -1) &= \tfrac{2}{3}(4) - \tfrac{2}{3}(10) - \tfrac{1}{3}(0) \\ &= -4 \end{aligned}$$

17.1.6 DEFINIÇÃO Se f for uma função de três variáveis x, y e z e as derivadas parciais f_x, f_y e f_z existirem, então o **gradiente** de f, denotado por ∇f, será definido por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y\ z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Da mesma forma que para funções de duas variáveis, segue do Teorema 17.1.5 e da Definição 17.1.6 que se $\mathbf{U} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$, então

$$\boxed{D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = \mathbf{U} \cdot \nabla f(x, y, z)}$$

Também, a derivada direcional será um máximo quando $\mathbf{U}$ estiver na direção e sentido do gradiente e a derivada direcional máxima será o módulo do gradiente.

Aplicações do gradiente aparecem em Física, em problemas de condução do calor e eletricidade. Suponha que $w = f(x, y, z)$. A superfície de nível dessa função f para o valor constante k é dada por

$$f(x, y, z) = k \tag{6}$$

Se w for o número de graus da temperatura no ponto (x, y, z), então todos os pontos na superfície dada pela equação (6) terão a mesma temperatura e k graus, e a superfície será chamada de **superfície isotérmica**. Se w for o número de volts do potencial elétrico no ponto (x, y, z), então todos os pontos da superfície estarão no mesmo potencial e a superfície será chamada de **superfície eqüipotencial**. O vetor gradiente em um ponto dá a direção e o sentido de maior taxa de variação de w. Assim, se a superfície de nível da equação (6) for isotérmica, $\nabla f(x, y, z)$ dará a direção e sentido da maior taxa de variação da temperatura em (x, y, z). Se (6) for a equação de uma superfície eqüipotencial, então $\nabla f(x, y, z)$ dará a direção e sentido da maior taxa de variação do potencial em (x, y, z).

EXEMPLO 5 Se $V(x, y, z)$ volts for o potencial elétrico num ponto (x, y, z) do espaço tridimensional e

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ache: (a) a taxa de variação de V no ponto $(2, 2, -1)$, na direção do vetor $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, (b) a direção e sentido em que se dá a maior taxa de variação de V em $(2, 2, -1)$.

Solução

(a) Um vetor unitário na direção e sentido de $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ é

$$\mathbf{U} = \tfrac{2}{7}\mathbf{i} - \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{6}{7}\mathbf{k}$$

Queremos encontrar $D_{\mathbf{U}}V(2, 2, -1)$.

$$\begin{aligned}\nabla V(x, y, z) &= V_x(x, y, z)\mathbf{i} + V_y(x, y, z)\mathbf{j} + V_z(x, y, z)\mathbf{k}\\ &= \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{U}}V(2, 2, -1) &= \mathbf{U} \cdot \nabla V(2, 2, -1)\\ &= \left(\tfrac{2}{7}\mathbf{i} - \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{6}{7}\mathbf{k}\right) \cdot \left(-\tfrac{2}{27}\mathbf{i} - \tfrac{2}{27}\mathbf{j} + \tfrac{1}{27}\mathbf{k}\right)\\ &= -\tfrac{4}{189} + \tfrac{6}{189} + \tfrac{6}{189}\\ &= \tfrac{8}{189}\\ &\approx 0{,}042\end{aligned}$$

Assim sendo, em $(2, 2, -1)$ o potencial é crescente, a uma taxa de aproximadamente 0,042 volt por unidade de variação, na distância medida na direção e sentido de $\mathbf{U}$.

(b) $\nabla V(2, 2, -1) = -\tfrac{2}{27}\mathbf{i} - \tfrac{2}{27}\mathbf{j} + \tfrac{1}{27}\mathbf{k}$. Um vetor unitário na direção e sentido de $\nabla V(2, 2, -1)$ é

$$\begin{aligned}\frac{\nabla V(2, 2, -1)}{\|\nabla V(2, 2, -1)\|} &= \frac{-\tfrac{2}{27}\mathbf{i} - \tfrac{2}{27}\mathbf{j} + \tfrac{1}{27}\mathbf{k}}{\tfrac{3}{27}}\\ &= -\tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{2}{3}\mathbf{j} + \tfrac{1}{3}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Os co-senos diretores desse vetor são $-\tfrac{2}{3}$, $-\tfrac{2}{3}$ e $\tfrac{1}{3}$, o que dá a direção e sentido da maior taxa de variação de V em $(2, 2, -1)$.

EXERCÍCIOS 17.1

Nos Exercícios de 1 a 6, ache a derivada direcional da função dada na direção e sentido do vetor unitário $\mathbf{U}$ *dado, usando a Definição 17.1.1 ou a Definição 17.1.4, e então verifique seu resultado, aplicando o Teorema 17.1.2 ou o Teorema 17.1.5, conforme o caso.*

1. $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$; $\mathbf{U} = \cos \tfrac{1}{4}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \tfrac{1}{4}\pi\mathbf{j}$

2. $g(x, y) = 3x^2 - 4y^2$; $\mathbf{U} = \cos \tfrac{1}{3}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi\mathbf{j}$

3. $h(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - 4z^2$; $\mathbf{U} = \cos \tfrac{1}{3}\pi\mathbf{i} + \cos \tfrac{1}{4}\pi\mathbf{j} + \cos \tfrac{2}{3}\pi\mathbf{k}$

4. $f(x, y, z) = 6x^2 - 2xy + yz$; $\mathbf{U} = \tfrac{3}{7}\mathbf{i} + \tfrac{2}{7}\mathbf{j} + \tfrac{6}{7}\mathbf{k}$

5. $g(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$; $\mathbf{U} = -\tfrac{12}{13}\mathbf{i} + \tfrac{5}{13}\mathbf{j}$

6. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; $\mathbf{U} = \tfrac{3}{5}\mathbf{i} - \tfrac{4}{5}\mathbf{j}$

Nos Exercícios de 7 a 14, ache o gradiente da função dada.

7. $f(x, y) = 4x^2 - 3xy + y^2$

8. $g(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

9. $g(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

10. $f(x, y) = e^y \operatorname{tg} 2x$

11. $f(x, y, z) = \dfrac{x - y}{x + z}$

12. $f(x, y, z) = 3z \ln(x + y)$

13. $g(x, y, z) = xe^{-2y} \sec z$

14. $g(x, y, z) = e^{2z}(\operatorname{sen} x - \cos y)$

Nos Exercícios de 15 a 22, ache o valor da derivada direcional no ponto P_0 *para a função dada na direção e sentido de* $\mathbf{U}$.

15. $f(x, y) = x^2 - 2xy^2$; $\mathbf{U} = \cos \pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \pi\mathbf{j}$; $P_0 = (1, -2)$

16. $g(x, y) = 3x^3y + 4y^2 - xy$; $\mathbf{U} = \cos \tfrac{1}{4}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \tfrac{1}{4}\pi\mathbf{j}$; $P_0 = (0, 3)$

17. $g(x, y) = y^2 \operatorname{tg}^2 x$; $\mathbf{U} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}\mathbf{j}$; $P_0 = (\tfrac{1}{3}\pi, 2)$

18. $f(x, y) = xe^{2y}$; $\mathbf{U} = \tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}$; $P_0 = (2, 0)$

19. $h(x, y, z) = \cos(xy) + \operatorname{sen}(yz)$; $\mathbf{U} = -\tfrac{1}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} + \tfrac{2}{3}\mathbf{k}$; $P_0 = (2, 0, -3)$

20. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $\mathbf{U} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$; $P_0 = (1, 3, 2)$

21. $f(x, y) = e^{-3x}\cos 3y$; $\mathbf{U} = \cos(-\frac{1}{12}\pi)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(-\frac{1}{12}\pi)\mathbf{j}$; $P_0 = (-\frac{1}{12}\pi, 0)$

22. $g(x, y, z) = \cos 2x \cos 3y \operatorname{senh} 4z$;

$\mathbf{U} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$; $P_0 = (\frac{1}{2}\pi, 0, 0)$

Nos Exercícios de 23 a 26, ache (a) o gradiente de f em P e (b) a taxa de variação dos valores funcionais na direção de **U** *em P.*

23. $f(x, y) = x^2 - 4y$; $P = (-2, 2)$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{3}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi\mathbf{j}$

24. $f(x, y) = e^{2xy}$; $P = (2, 1)$; $\mathbf{U} = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$

25. $f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4xz$; $P = (-2, 1, 3)$; $\mathbf{U} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{6}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$

26. $f(x, y, z) = 2x^3 + xy^2 + xz^2$; $P = (1, 1, 1)$; $\mathbf{U} = \frac{1}{7}\sqrt{21}\mathbf{j} - \frac{2}{7}\sqrt{7}\mathbf{k}$

27. Para um mapa topográfico mostrando as curvas de nível da função do Exercício 23, em 8, 4, 0, -4 e -8. Mostre também a representação de $\nabla f(-2, 2)$, tendo seu ponto inicial em $(-2, 2)$.

28. Faça um mapa topográfico mostrando as curvas de nível da função do Exercício 24, em e^8, e^4, 1, e^{-4} e e^{-8}. Mostre também a representação de $\nabla f(2, 1)$, tendo seu ponto inicial em $(2, 1)$.

Nos Exercícios de 29 a 32, ache $D_{\mathbf{U}}f$ no ponto P dado, onde **U** *é o vetor unitário na direção e sentido $\overrightarrow{PQ}$. Também em P ache* $D_{\mathbf{U}}f$, se **U** *for um vetor unitário para o qual $D_{\mathbf{U}}f$ é um máximo.*

29. $f(x, y) = e^x \operatorname{tg}^{-1} y$; $P(0, 1)$, $Q(3, 5)$

30. $f(x, y) = e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} x$; $P(1, 0)$, $Q(-3, 3)$

31. $f(x, y, z) = x - 2y + z^2$; $P(3, 1, -2)$, $Q(10, 7, 4)$

32. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4xz$; $P(3, 1, -2)$, $Q(-6, 3, 4)$

33. Ache a direção e o sentido a partir do ponto $(1, 3)$ para a qual os valores de f não mudam, sendo $f(x, y) = e^{2y} \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{y}{3x}$.

34. A densidade é $\rho(x, y)$ kg/m² em todos os pontos de uma placa retangular no plano xy e

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 3}}$$

(a) Ache a taxa de variação da densidade no ponto $(3, 2)$, na direção e sentido do vetor unitário $\cos \frac{2}{3}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi\mathbf{j}$. (b) Ache a direção e sentido e o valor da maior taxa de variação de ρ em $(3, 2)$.

35. A temperatura é $T(x, y)$ graus em qualquer ponto de uma placa retangular situada no plano xy e $T(x, y) = 3x^2 + 2xy$. A distância é medida em metros. (a) Ache a taxa de variação máxima da temperatura no ponto $(3, -6)$ da placa. (b) Ache a direção e sentido em que a taxa de variação é máxima em $(3, -6)$.

36. A temperatura é $T(x, y, z)$ graus em qualquer ponto de um sólido no espaço tridimensional, e

$$T(x, y, z) = \frac{60}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$$

A distância é medida em centímetros. (a) Ache a taxa de variação da temperatura no ponto $(3, -2, 2)$, na direção e sentido do vetor $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. (b) Ache a direção e sentido e o valor máximo da taxa de variação de T em $(3, -2, 2)$.

37. O potencial elétrico é $V(x, y)$ volts em qualquer ponto do plano xy e $V(x, y) = e^{-2x}\cos 2y$. A distância é medida em metros. (a) Ache a taxa de variação do potencial no ponto $(0, \frac{1}{4}\pi)$, na direção do vetor unitário $\cos \frac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi\mathbf{j}$. (b) Ache a direção e sentido e o valor da taxa de variação máxima de V em $(0, \frac{1}{4}\pi)$.

38. A equação da superfície de uma montanha é

$$z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$$

onde a distância é medida em metros, o eixo x aponta para o leste e o eixo y para o norte. Uma alpinista está no ponto correspondente a $(-10, 5, 850)$. (a) Qual a direção onde a subida é mais íngreme? (b) Se a alpinista se move na direção leste, ela está subindo ou descendo, e qual a sua taxa? (c) Se a alpinista se move na direção sudoeste, ela está subindo ou descendo, e qual a sua taxa? (d) Em que direção ela estará sobre uma curva de nível?

17.2 PLANOS TANGENTES E NORMAIS A SUPERFÍCIES

Seja S a superfície tendo a equação

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

e suponha que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ seja um ponto de S. Então, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Suponha ainda que C seja uma curva em S que passa por P_0 e que um conjunto de equações paramétricas de C seja

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t) \tag{2}$$

onde o valor do parâmetro t no ponto P_0 é t_0. Uma equação vetorial de C é

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Como a curva C está na superfície S, substituindo (2) em (1), temos

$$F(f(t), g(t), h(t)) = 0 \tag{3}$$