20. Ache o valor médio da função f definida por $f(x) = \sec^2 x$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$, dado que $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx = 1$. Ache também o valor de x onde ocorre o valor médio. Dê uma interpretação geométrica dos resultados.

21. Suponha que uma bola saia do repouso e após t s sua velocidade seja v m/s. Desprezando a resistência do ar, expresse v em termos de t como $v = f(t)$ e ache o valor médio de f em $[0, 2]$. (*Sugestão*: ache o valor da integral definida interpretando-a como a medida da área da região contida num triângulo.)

22. Ache o valor médio da função f definida por $f(x) = \sqrt{49 - x^2}$ no intervalo $[0, 7]$. Faça uma figura. (*Sugestão*: ache o valor da integral definida, interpretando-a como a medida da área da região encerrada por um quarto de círculo.)

23. Ache o valor médio da função f definida por $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ no intervalo $[-4, 4]$. Faça uma figura. (*Sugestão*: ache o valor da integral definida, interpretando-a como a região encerrada por um semicírculo.)

24. Suponha que f seja integrável em $[-4, 7]$. Se o valor médio de f no intervalo $[-4, 7]$ for $\frac{17}{4}$, ache $\int_{-4}^{7} f(x)\, dx$.

25. Se f for contínua em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, prove que existe pelo menos um número c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

26. O seguinte teorema é uma generalização do Teorema do valor médio para integrais: se f e g forem contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e $g(x) > 0$ para todo x no intervalo aberto (a, b), então existirá um número χ em $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(\chi) \int_a^b g(x)\, dx$$

Prove esse teorema por um método semelhante ao do Teorema 5.7.1: obtenha a desigualdade $m \leqslant f(x) \leqslant M$ e então conclua que $mg(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant Mg(x)$; aplique o Teorema 5.6.8 e prossiga como na demonstração do Teorema 5.7.1.

27. Mostre que se $g(x) = 1$, o teorema do Exercício 26 torna-se o teorema do valor médio para integrais.

Nos Exercícios de 28 a 32, use o teorema do Exercício 26 para provar a desigualdade.

28. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x\, dx}{x^3 + 2} < \int_0^4 x\, dx$

29. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 + 4}} < \int_{-1}^1 x^2\, dx$

30. $\displaystyle\int_0^\pi x \operatorname{sen} x\, dx \leqslant \int_0^\pi x\, dx$

31. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sen}^2 \pi x \cos \pi x\, dx \leqslant \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi x\, dx$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \cos x}{x^2 + 1}\, dx \leqslant \int_0^1 x\, dx$

5.8 OS TEOREMAS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO

Historicamente, os conceitos básicos da integral definida foram usados pelos antigos gregos, principalmente Arquimedes (287—212 A.C.), há mais de 2000 anos, muito antes da formulação do cálculo diferencial.

No século dezessete, quase simultaneamente mas trabalhando independentemente, Newton e Leibniz mostraram como o Cálculo poderia ser usado para se encontrar a área de uma região limitada por uma curva ou um conjunto de curvas, determinando uma integral definida por antidiferenciação. O procedimento envolve o que é conhecido como os *teoremas fundamentais do Cálculo*. Antes de enunciar e prová-los, vamos discutir as integrais definidas com um limite superior variável.

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Então o valor da integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ depende somente da função f e dos números a e b, não do símbolo x usado aqui como variável independente. No Exemplo 1, Secção 5.5, encontramos o valor de $\int_1^3 x^2\, dx$, que é $\frac{26}{3}$. Qualquer outro símbolo poderia ter sido usado no lugar de x; por exemplo,

$$\int_1^3 t^2\, dt = \tfrac{26}{3} \qquad \int_1^3 u^2\, du = \tfrac{26}{3} \qquad \int_1^3 r^2\, dr = \tfrac{26}{3}$$

Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então, pelo Teorema 5.5.3 a integral definida $\int_a^b f(t)\, dt$ existe. Vamos primeiramente estabelecer que se uma integral definida existir, então ela será um único número. Se x for um número em $[a, b]$, então f será contínua em $[a, x]$, pois é contínua em $[a, b]$. Conseqüentemente, $\int_a^x f(t)\, dt$ existe e é um número cujo valor depende de x. Logo, $\int_a^x f(t)\, dt$ define uma função F tendo como seu domínio todos os números no intervalo fechado $[a, b]$ e cujo valor funcional em qualquer número x de $[a, b]$ é dado por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

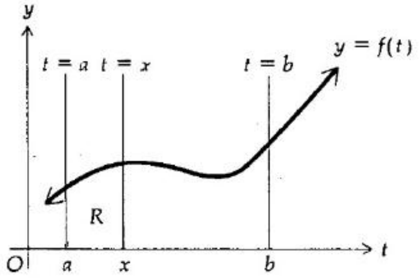

FIGURA 1

Segundo a convenção notacional, se os limites de uma integral definida forem variáveis, deverão ser usados símbolos diferentes para esses limites e para a variável independente no integrando. Assim, em (1), como x é o limite superior, usamos a letra t como a variável independente no integrando.

Se, na expressão (1), $f(t) \geqslant 0$ para todos os valores de t em $[a, b]$, então os valores funcionais de $F(x)$ poderão ser interpretados geometricamente com a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é $y = f(t)$, pelo eixo t e pelas retas $t = a$ e $t = x$. (Veja a Figura 1). Note que $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt$, o que pela Definição 5.5.6 é igual a 0.

Vamos agora enunciar e provar um teorema importante que dá a derivada da função F definida como uma integral definida tendo um limite superior variável. Esse teorema é chamado de *primeiro teorema fundamental do Cálculo.*

5.8.1 TEOREMA
Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja x qualquer número em $[a, b]$. Se F for a função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

então,

$$F'(x) = f(x) \tag{2}$$

(Se $x = a$, a derivada em (2) pode ser a derivada à direita e se $x = b$, a derivada em (2) pode ser a derivada à esquerda.)

Prova Considere dois números x_1 e $x_1 + \Delta x$ em $[a, b]$. Então

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)\,dt$$

e

$$F(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt$$

então,

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt \tag{3}$$

Pelo Teorema 5.6.7,

$$\int_a^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt$$

$$\int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt$$

Substituindo essa igualdade em (3), obtemos

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt \tag{4}$$

Pelo teorema do valor médio para integrais (5.7.1) existe um número χ no intervalo fechado limitado por x_1 e $x_1 + \Delta x$ tal que

$$\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt = f(\chi)\,\Delta x$$

Dessa relação e de (4), obtemos

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = f(\chi)\,\Delta x$$

$$\frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = f(\chi)$$

Tomando o limite quando Δx tende a zero, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\chi) \tag{5}$$

O primeiro membro de (5) é $F'(x_1)$. Para determinar $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\chi)$, lembre que χ está no intervalo fechado limitado por x_1 e $x_1 + \Delta x$, e como

$$\lim_{\Delta x \to 0} x_1 = x_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \to 0} (x_1 + \Delta x) = x_1$$

segue do teorema do "Sanduíche" (2.8.1) que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \chi = x_1$. Assim, temos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\chi) = \lim\limits_{\chi \to x_1} f(\chi)$. Como f é contínua em x_1, $\lim\limits_{\chi \to x_1} f(\chi) = f(x_1)$; assim $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\chi) = f(x_1)$ e de (5) temos que

$$F'(x_1) = f(x_1) \tag{6}$$

Se a função f não estiver definida para valores de x menores do que a, mas for contínua à direita de a, então na argumentação acima, se $x_1 = a$ em (5), Δx precisa tender a 0 pela direita. Assim, o primeiro membro de (6) será $F'_+(x_1)$. Analogamente, se f não estiver definida para valores de x maiores do que b, mas for contínua à esquerda de b, então se $x_1 = b$ em (5), Δx deve tender a zero pela esquerda. Logo, teremos $F'_-(x_1)$ no primeiro membro de (6).

Como x_1 é um número qualquer em $[a, b]$, a igualdade (6) estabelece o que queríamos provar.

O Teorema 5.8.1 estabelece que a integral definida $\int_a^x f(t)\, dt$, com limite superior variável x, é uma antiderivada de f.

A equação (2) do teorema pode ser escrita da seguinte forma, substituindo $F'(x)$ por $\dfrac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt$:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)} \tag{7}$$

EXEMPLO 1 Calcule as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\, dt$ (b) $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\, dt$

Solução

(a) De (7) com $f(t) = \dfrac{1}{t^3 + 1}$, temos

$$\frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\, dt = \frac{1}{x^3 + 1}$$

(b) Usamos a regra da cadeia com $u = x^2$, e temos

$$\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\, dt = \frac{d}{du}\int_3^{u} \sqrt{\cos t}\, dt \cdot \frac{du}{dx}$$

De (7) com $f(t) = \sqrt{\cos t}$ e como $\frac{du}{dx} = 2x$, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\, dt &= \sqrt{\cos u}\,(2x)\\ &= 2x\sqrt{\cos x^2}\end{aligned}$$

Vamos usar agora o Teorema 5.8.1 para provar o *segundo teorema fundamental do Cálculo.*

5.8.2 TEOREMA Segundo Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja g uma função tal que

$$g'(x) = f(x) \tag{8}$$

para todo x em $[a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(t)\, dt = g(b) - g(a)$$

(Se $x = a$, a derivada em (8) pode ser uma derivada à direita, e se $x = b$, a derivada em (8) pode ser uma derivada à esquerda.)

Prova Se f for contínua em todos os números em $[a, b]$, sabemos do Teorema 5.8.1 que a integral definida $\int_a^x f(t)\, dt$, com o limite superior variável x, define uma função F cuja derivada em $[a, b]$ é f. Como, por hipótese, $g'(x) = f(x)$, segue do Teorema 5.1.2 que

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt + k$$

onde k é uma constante. Tomando $x = b$ e $x = a$, sucessivamente, nessa equação, obtemos

$$g(b) = \int_a^b f(t)\, dt + k \tag{9}$$

e

$$g(a) = \int_a^a f(t)\, dt + k \tag{10}$$

De (9) e (10),

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^a f(t)\, dt$$

Mas, pela Definição 5.5.6, $\int_a^a f(t)\, dt = 0$; assim

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\, dt$$

que é o que queríamos provar.

Se f não estiver definida para valores de x maiores do que b, mas for contínua à esquerda de b, a derivada em (8) será a derivada à esquerda, e teremos $g'_-(b) = F'_-(b)$, de onde segue (9). Da mesma forma, se f não estiver definida para valores de x menores do que a, mas for contínua à direita de a, então a derivada em (8) será a derivada à direita e teremos $g'_+(a) = F'_+(a)$, de onde segue (10). ■

Estamos agora em posição de encontrar o valor exato de uma integral definida, aplicando o Teorema 5.8.2. Quando aplicarmos esse teorema, usaremos a notação

$$[g(b) - g(a)] \quad \text{por} \quad g(x)\Big]_a^b$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos aplicar o segundo teorema fundamental do Cálculo para determinar

$$\int_1^3 x^2\, dx$$

Aqui $f(x) = x^2$. Uma antiderivada de x^2 é $\frac{1}{3}x^3$. Daí escolhemos

$$g(x) = \frac{x^3}{3}$$

Logo, do Teorema 5.8.2,

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2\, dx &= \frac{x^3}{3}\Big]_1^3 \\ &= 9 - \tfrac{1}{3} \\ &= \tfrac{26}{3}\end{aligned}$$

Compare esse resultado com o do Exemplo 1, Secção 5.5. ◀

Devido à conexão entre integrais definidas e antiderivadas, usamos o sinal de integral $\int$ para a notação $\int f(x)\, dx$ de antiderivada. Vamos dispensar agora a terminologia de antiderivadas e antidiferenciação e começaremos a chamar $\int f(x)\, dx$ de **integral indefinida**. O processo de cálculo de uma integral indefinida ou definida é chamado de **integração**.

Deve ser enfatizada a diferença entre uma integral indefinida e definida. A primeira, $\int f(x)\, dx$, foi estabelecida como sendo uma função g tal que sua derivada $D_x[g(x)] = f(x)$. Por outro lado, a segunda $\int_a^b f(x)\, dx$, é um número cujo valor depende da função f e dos números a e b e foi definida como o limite de uma soma de Riemann. A definição de integral definida não faz nenhuma referência à diferenciação.

A integral indefinida envolve uma constante arbitrária; por exemplo,

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$$

A constante arbitrária C é chamada de **constante de integração**. Ao aplicar o segundo teorema fundamental do Cálculo não é preciso incluir a constante arbitrária C na expressão de $g(x)$, pois o teorema permite-nos escolher *qualquer* antiderivada, inclusive aquela para a qual $C = 0$.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\, dx &= \int_{1/2}^{4} x^3\, dx - 6\int_{1/2}^{4} x^2\, dx + 9\int_{1/2}^{4} x\, dx + \int_{1/2}^{4} dx \\ &= \frac{x^4}{4} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + 9\cdot\frac{x^2}{2} + x\Big]_{1/2}^{4} \\ &= (64 - 128 + 72 + 4) - (\tfrac{1}{64} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{8} + \tfrac{1}{2}) \\ &= \tfrac{679}{64}\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int_{-1}^{1} (x^{4/3} + 4x^{1/3})\, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (x^{4/3} + 4x^{1/3})\, dx &= \tfrac{3}{7}x^{7/3} + 4\cdot\tfrac{3}{4}x^{4/3}\Big]_{-1}^{1} \\ &= \tfrac{3}{7} + 3 - (-\tfrac{3}{7} + 3) \\ &= \tfrac{6}{7}\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int_{0}^{2} 2x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2} 2x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx &= \frac{2}{3}\int_{0}^{2} \sqrt{x^3 + 1}\,(3x^2\, dx) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{(x^3 + 1)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{2} \\ &= \tfrac{4}{9}(8 + 1)^{3/2} - \tfrac{4}{9}(0 + 1)^{3/2} \\ &= \tfrac{4}{9}(27 - 1) \\ &= \tfrac{104}{9}\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int_{0}^{3} x\sqrt{1 + x}\, dx$$

Solução Para calcular a integral indefinida $\int x\sqrt{1 + x}\, dx$, seja

$$u = \sqrt{1 + x} \qquad u^2 = 1 + x \qquad x = u^2 - 1 \qquad dx = 2u\, du$$