40. Uma equação da reta tangente à curva no ponto (1, 3) é $y = x + 2$. Se em qualquer ponto (x, y) da curva $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$, ache uma equação da curva. Veja a sugestão para o Exercício 39.

41. Em qualquer ponto (x, y) de uma curva, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 - x^2$ e uma equação da reta tangente à curva no ponto (1, 1) é $y = 2 - x$. Ache uma equação da curva. Veja a sugestão dada no Exercício 39.

42. Em qualquer ponto (x, y) de uma curva, $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 2$ e (1, 3) é um ponto de inflexão no qual a inclinação da tangente de inflexão é -2. Ache uma equação da curva.

43. A função custo marginal é dada por $C'(x) = 3x^2 + 8x + 4$, e o custo geral é $ 6. Ache a função custo total.

44. Uma empresa determinou que a função custo marginal para a produção de certa mercadoria é dada por $C'(x) = 125 + 10x + \frac{1}{9}x^2$, onde $C(x)$ é o custo total da produção de x unidades da mercadoria. Se o custo geral for de $ 250, qual será o custo da produção de 15 unidades?

45. A função custo marginal é definida por $C'(x) = 6x$, onde $C(x)$ é o número de centenas de unidades monetárias no custo total de x centenas de unidades de certa mercadoria. Se o custo de 200 unidades for $ 2000, ache (a) a função custo total e (b) o custo geral.

46. A função rendimento marginal para uma certa mercadoria é $R'(x) = 12 - 3x$. Se x unidades forem demandadas quando p unidades monetárias for o preço unitário, ache (a) a função rendimento total e (b) uma equação envolvendo p e x (a equação de demanda).

47. Para um determinado artigo, a função rendimento marginal é dada por $R'(x) = 15 - 4x$. Se x unidades forem demandadas quando p unidades monetárias for o preço por unidade, ache (a) a função rendimento total e (b) uma equação envolvendo p e x (a equação de demanda).

48. A eficiência de um operário é dada por uma porcentagem. Por exemplo, se a eficiência do trabalhador num dado intervalo de tempo for de 70%, então ele está trabalhando com 70% de todo o seu potencial. Suponha que E% seja a sua eficiência t horas após começar a trabalhar e que a taxa segundo a qual E está variando é $(35 - 8t)$%, a cada hora. Se a eficiência após 3 h de trabalho for de 81%, ache a sua eficiência após trabalhar (a) 4 h e (b) 8 h.

49. O volume de água num tanque é V m³ quando a profundidade da água é h m. Se a taxa de variação de V em relação a h for $\pi(4h^2 + 12h + 9)$, ache o volume de água no tanque quando a profundidade for de 3 m.

50. Um colecionador de arte comprou uma pintura por $ 1.000 de um artista cujos trabalhos aumentam de valor em relação ao tempo, de acordo com a fórmula $\dfrac{dV}{dt} = 5t^{3/2} + 10t + 50$, onde V é o valor estimado de uma pintura t anos após sua compra. Se essa fórmula for válida pelos próximos 6 anos, qual o valor previsto para a pintura daqui a quatro anos?

51. Seja $f(x) = 1$ para todo x em $(-1, 1)$ e seja

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Então $f'(x) = 0$ para todo x em $(-1, 1)$ e $g'(x) = 0$, onde quer que exista g' em $(-1, 1)$. Mas, $f(x) \neq g(x) + K$ para x em $(-1, 1)$. Por que o Teorema 5.1.2 não é válido?

52. Seja

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$$

e $F(x) = |x|$. Mostre que $F'(x) = f(x)$ se $x \neq 0$. F é uma antiderivada de f em $(-\infty, +\infty)$? Explique.

53. Seja $f(x) = |x|$ e F definida por

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$$

Mostre que F é uma antiderivada de f em $(-\infty, +\infty)$.

54. Seja

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$$

Mostre que U não tem uma antiderivada em $(-\infty, +\infty)$. (*Sugestão*: suponha que U tenha uma antiderivada F em $(-\infty, +\infty)$ e uma contradição será obtida se mostrarmos, então, que pelo teorema do valor médio existe um número k, tal que $F(x) = x + k$ se $x > 0$ e $F(x) = k$ se $x < 0$.)

5.2 ALGUMAS TÉCNICAS DE ANTIDIFERENCIAÇÃO

Muitas antiderivadas não podem ser encontradas diretamente com a aplicação dos teoremas da Secção 5.1. E então, faz-se necessário aprender certas técnicas que podem ser usadas no cálculo de tais antiderivadas. Nesta secção discutiremos técnicas que requerem a ***regra da cadeia para a antidiferenciação*** e aquelas que envolvem uma mudança de variável.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Para diferenciar $\frac{1}{10}(1 + x^2)^{10}$ aplicamos a regra da cadeia para a diferenciação e obtemos

$$D_x[\tfrac{1}{10}(1 + x^2)^{10}] = (1 + x^2)^9(2x)$$

Suponha que desejamos antidiferenciar $(1 + x^2)^9(2x)$. Então, precisamos calcular

$$\int (1 + x^2)^9(2x\,dx) \tag{1}$$

Para chegarmos a um procedimento que possa ser usado em tal situação, seja

$$g(x) = 1 + x^2 \qquad g'(x)\,dx = 2x\,dx \tag{2}$$

Então, (1) pode ser escrito como

$$\int [g(x)]^9[g'(x)\,dx] \tag{3}$$

Do Teorema 5.1.8,

$$\int u^9\,du = \tfrac{1}{10}u^{10} + C \tag{4}$$

Observe que (3) é da mesma forma que o primeiro membro de (4). Assim,

$$\int [g(x)]^9[g'(x)\,dx] = \tfrac{1}{10}[g(x)]^{10} + C$$

e com $g(x)$ e $g'(x)\,dx$ dados em (2), temos

$$\int (1 + x^2)^9(2x\,dx) = \tfrac{1}{10}(1 + x^2)^{10} + C$$

◄

A justificativa do procedimento usado para obter o resultado da Ilustração 1 é dada pelo teorema a seguir, que é análogo à regra da cadeia para diferenciação, sendo chamado de *regra da cadeia para antidiferenciação*.

5.2.1 TEOREMA A Regra da Cadeia para a Antidiferenciação

Seja g uma função diferenciável e seja o intervalo I a imagem de g. Suponha que f seja uma função definida em I e que F seja uma antiderivada de f em I. Então,

$$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

Prova Por hipótese,

$$F'(g(x)) = f(g(x)) \tag{5}$$

Pela regra da cadeia para diferenciação,

$$D_x[F(g(x))] = F'(g(x))[g'(x)]$$

Substituindo (5) nessa equação, obtemos

$$D_x[F(g(x))] = f(g(x))[g'(x)]$$

Da qual segue que

$$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

que é o que queríamos provar. ■

Como um caso particular do Teorema 5.2.1, a partir do Teorema 5.1.8, temos a fórmula da potência generalizada para antiderivadas, que enunciaremos a seguir.

5.2.2 TEOREMA

Se g for uma função diferenciável e se n for um número racional,

$$\int [g(x)]^n[g'(x)\,dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \sqrt{3x+4}\,dx$$

Solução Para aplicar o Teorema 5.2.2, escrevemos primeiro

$$\int \sqrt{3x+4}\,dx = \int (3x+4)^{1/2}\,dx$$

Observamos que, se

$$g(x) = 3x + 4 \quad \text{então} \quad g'(x)\,dx = 3\,dx \tag{6}$$

Logo, precisamos de um fator de 3 que acompanhe dx para dar $g'(x)\,dx$. Assim sendo, escrevemos

$$\begin{aligned}\int (3x+4)^{1/2}\,dx &= \int (3x+4)^{1/2}\,\tfrac{1}{3}(3\,dx)\\ &= \tfrac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\,dx)\end{aligned}$$

Do Teorema 5.2.2, com $g(x)$ e $g'(x)\,dx$ dados por (6), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\,dx) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C\\ &= \tfrac{2}{9}(3x+4)^{3/2} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Ache

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx$$

Solução Observe que, se

$$g(x) = 5 + 2x^3 \quad \text{então} \quad g'(x)\,dx = 6x^2\,dx \tag{7}$$

Como

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx = \int (5+2x^3)^8(x^2\,dx)$$

precisamos de um fator 6 que acompanhe $x^2\,dx$ para obter $g'(x)\,dx$. Assim, escrevemos

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx = \tfrac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2\,dx)$$

Aplicando o Teorema 5.2.2 com $g(x)$ e $g'(x)\,dx$ dado em (7), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2\,dx) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{(5+2x^3)^9}{9} + C\\ &= \tfrac{1}{54}(5+2x^3)^9 + C\end{aligned}$$

A regra da cadeia para a antidiferenciação (Teorema 5.2.1) é

$$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

onde F é uma antiderivada de f. Se nessa fórmula f for a função co-seno, então F será a função seno e teremos

$$\int \cos(g(x))[g'(x)\,dx] = \operatorname{sen}(g(x)) + C \tag{8}$$

Vamos usar essa fórmula no próximo exemplo.

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int x \cos x^2 \, dx$$

Solução Se

$$g(x) = x^2 \quad \text{então} \quad g'(x)\,dx = 2x\,dx \tag{9}$$

Como

$$\int x \cos x^2 \, dx = \int (\cos x^2)(x\,dx)$$

precisamos de um fator de 2 acompanhando $x\,dx$ para obter $g'(x)\,dx$. Assim, escrevemos

$$\int x \cos x^2 \, dx = \tfrac{1}{2} \int (\cos x^2)(2x\,dx)$$

Aplicando (8) com $g(x)$ e $g'(x)\,dx$ dados por (9), iremos obter

$$\tfrac{1}{2} \int (\cos x^2)(2x\,dx) = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C$$

Os detalhes das soluções dos Exemplos 1, 2 e 3 podem ser simplificados, não estabelecendo especificamente $g(x)$ e $g'(x)\,dx$. A solução do Exemplo 1, então, toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{3x+4}\,dx &= \frac{1}{3} \int (3x+4)^{1/2}(3\,dx) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C \\
&= \tfrac{2}{9}(3x+4)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

A solução do Exemplo 2 pode ser obtida por

$$\begin{aligned}
\int x^2(5+2x^3)^8\,dx &= \frac{1}{6} \int (5+2x^3)^8(6x^2\,dx) \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{(5+2x^3)^9}{9} + C \\
&= \tfrac{1}{54}(5+2x^3)^9 + C
\end{aligned}$$

e a solução do Exemplo 3 pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\int x \cos x^2\,dx &= \tfrac{1}{2} \int (\cos x^2)(2x\,dx) \\
&= \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \frac{4x^2\,dx}{(1-8x^3)^4}$$

Solução Como $d(1 - 8x^3) = -24x^2\,dx$, escrevemos

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2\,dx}{(1-8x^3)^4} &= 4\int (1-8x^3)^{-4}(x^2\,dx)\\ &= 4\left(-\frac{1}{24}\right)\int (1-8x^3)^{-4}(-24x^2\,dx)\\ &= -\frac{1}{6}\cdot\frac{(1-8x^3)^{-3}}{-3} + C\\ &= \frac{1}{18(1-8x^3)^3} + C\end{aligned}$$

Os resultados de cada um dos exemplos acima podem ser verificados através do cálculo da derivada da resposta.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** No Exemplo 2 tínhamos

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx = \tfrac{1}{54}(5+2x^3)^9 + C$$

Verificando por diferenciação, obtemos

$$\begin{aligned}D_x[\tfrac{1}{54}(5+2x^3)^9] &= \tfrac{1}{54}\cdot 9(5+2x^3)^8(6x^2)\\ &= x^2(5+2x^3)^8\end{aligned}$$ ◀

Algumas vezes é possível calcular uma antiderivada após efetuarmos a mudança de uma variável, conforme mostra o exemplo a seguir.

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$$

Solução Seja

$$u = 1 + x \qquad du = dx \qquad x = u - 1$$

Temos

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x}\,dx &= \int (u-1)^2 u^{1/2}\,du\\ &= \int (u^2 - 2u + 1)u^{1/2}\,du\\ &= \int u^{5/2}\,du - 2\int u^{3/2}\,du + \int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{u^{7/2}}{\frac{7}{2}} - 2\cdot\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C\\ &= \tfrac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Um método alternativo para a solução do Exemplo 5 é tomar

$$v = \sqrt{1+x} \qquad v^2 = 1 + x$$

$$x = v^2 - 1 \qquad dx = 2v\,dv$$

O cálculo, então, é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x}\,dx &= \int (v^2-1)^2\cdot v\cdot(2v\,dv)\\ &= 2\int v^6\,dv - 4\int v^4\,dv + 2\int v^2\,dv\\ &= \tfrac{2}{7}v^7 - \tfrac{4}{5}v^5 + \tfrac{2}{3}v^3 + C\\ &= \tfrac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Verificando por diferenciação, obtemos

$$\begin{aligned}&D_x[\tfrac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}]\\ &\quad= (1+x)^{5/2} - 2(1+x)^{3/2} + (1+x)^{1/2}\\ &\quad= (1+x)^{1/2}[(1+x)^2 - 2(1+x) + 1]\\ &\quad= (1+x)^{1/2}[1 + 2x + x^2 - 2 - 2x + 1]\\ &\quad= x^2\sqrt{1+x}\end{aligned}$$

◀

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solução Seja

$$u = \sqrt{x} \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} &= 2\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)\\ &= 2\int \operatorname{sen}\,u\,du\\ &= -2\cos u + C\\ &= -2\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 7 Calcule

$$\int \operatorname{sen} x\sqrt{1-\cos x}\,dx$$

Solução Seja

$$u = 1 - \cos x \qquad du = \operatorname{sen}\,x\,dx$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x\sqrt{1-\cos x}\,dx &= \int u^{1/2}\,du\\ &= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C\\ &= \tfrac{2}{3}(1-\cos x)^{3/2} + C\end{aligned}$$
