1. Limites

1.4. Cálculo dos Limites

1.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=$$

Temos que:

$$x^2+x-6=0 \to \Delta = 1+6x4=25 \to \frac{-1\pm 5}{2}=x \to x_1=-3\ x_2=2$$

Logo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}=x+3 \to \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=2+3=5$$

2.

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}=$$

Temos na expressão da parte de cima que:

$$x^2+5x+4=0 \to \Delta = 25-4x4=9 \to \frac{-5\pm 3}{2}=x \to x_1=-4\ x_2=-1 \to$$

$$x^2+5x+4=(x+4)(x+1)$$

Temos também que:

$$x^2+3x-4=0 \to \Delta = 9+4x4=25 \to \frac{-3\pm 5}{2}=x \to x_1=-4\ x_2=1$$

$$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$$

Logo:

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(x+1)}{(x+4)(x-1)}=\lim_{x\to -4}\frac{x+1}{x-1}=\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}$$

3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+6}{x-2}=$$

Temos que:

x^2 - x + 6 = 0 → Δ = 1 – 6x4 = -23, como não haverá solução real, existirá uma indeterminação, logo o limite não existe.

4.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}=$$

Temos na parte de cima que:

$$x^2-4x=x(x-4)$$

E que na parte de baixo:

$$x^2-3x-4=0\to \Delta=9+4x4=25\to\frac{3\pm 5}{2}=x\to\ x_1=4\,x_2=-1$$

$$x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+1)}=\lim_{x\to 4}\frac{x}{x+1}=\frac{4}{5}$$

5.

$$\lim_{t\to -3}\frac{t^2-9}{2t^2+7t+3}=$$

Temos na parte de cima da equação que:

$$t^2-9=(t-3)(t+3)$$

Temos na parte de baixo da equação que:

$$2t^2+7t+3=0\to\ \Delta=49-2x3x4=25\to\frac{-7\pm 5}{4}=t\to\ t_1=-3\,t_2=-\frac{1}{2}$$

Logo:

$$\lim_{t\to -3}\frac{t^2-9}{2t^2+7t+3}=\lim_{t\to -3}\frac{(t-3)(t+3)}{(t+3)\left(t+\frac{1}{2}\right)}=\lim_{t\to -3}\frac{t-3}{\left(t+\frac{1}{2}\right)}=\frac{-6}{\frac{-5}{2}}=\frac{12}{5}$$

6.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}=$$

Temos na parte de cima que:

$$x^2-4x=x(x-4)$$

E que na parte de baixo:

$$x^2-3x-4=0\to \Delta=9+4x4=25\to\frac{3\pm 5}{2}=x\to\ x_1=4\,x_2=-1$$

$$x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x}{x+1}\to$$

Se substituirmos, o valor do denominador será zero. Assim, tal limite não existe.

7.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-16}{h}=$$

Temos, que no numerador:

$$(4+h)^2-16=(4+h-4)(4+h+4)=h(8+h)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-16}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(8+h)}{h}=\lim_{h\to 0}8+h=8$$

8.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=$$

Temos na parte da cima da equação que:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

Já na parte de baixo, temos:

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

Assim:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)}=\frac{3}{2}$$

9.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^4-1}{h}=$$

Temos, que no numerador:

$$(1+h)^4-1=(1+2h+h^2-1)(1+2h+h^2+1)=h(h+2)(2+2h+h^2)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^4-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2)(2+2h+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2)(2+2h+h^2)=4$$

10.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}=$$

Temos que no numerador que:

$(2+h)^3 - 2^3 = (2+h-2).[(2+h)^2 + (2+h).2 + 2^2]$

=h.[(2+h)^2 + 2h + 8]

Então:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h[(2+h)^2+2h+8)]}{h}=\lim_{h\to 0}[(2+h)^2+2h+8)]=12$$

11.

$$\lim_{t\to 9}\frac{9-t}{3-\sqrt{t}}=$$

Temos na parte de cima da equação que:

$$9-t=\left(3-\sqrt{t}\right)(3+\sqrt{t})$$

Então:

$$\lim_{t\to 9}\frac{9-t}{3-\sqrt{t}}=\lim_{t\to 9}\frac{\left(3-\sqrt{t}\right)(3+\sqrt{t})}{3-\sqrt{t}}=\lim_{t\to 9}\left(3+\sqrt{t}\right)=6$$

12.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=$$

Teremos que racionalizar a fração, assim:

$$\frac{\left(\sqrt{1+h}-1\right)}{h}\frac{\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=\frac{(1+h-1)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+h}+1\right)}$$

Então:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

13.

$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=$

Teremos que racionalizar a fração, assim:

$$\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}\frac{\left(\sqrt{x+2}+3\right)}{\left(\sqrt{x+2}+3\right)}=\frac{(x+2-9)}{(x-7)\left(\sqrt{x+2}+3\right)}=\frac{(x-7)}{(x-7)\left(\sqrt{x+2}+3\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+3\right)}$$

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+3\right)}=\frac{1}{6}$$

14.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=$$

Simplificando, teremos:

$$\frac{x^4-16}{x-2}=\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2}=(x+2)(x^2+4)$$

Logo, teremos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)(x^2+4)=32$$

15.

$$\lim_{x\to -4}\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}=$$

Simplificando, temos:

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}=\frac{\frac{4+x}{4x}}{4+x}=\frac{1}{4x}$$

$$\lim_{x\to -4}\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}=\lim_{x\to -4}\frac{1}{4x}=\frac{-1}{16}$$

16.

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+t}\right)=$$

Simplificando, temos:

$$\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+t}\right)=\frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)=\frac{1}{t}\left(\frac{t+1-1}{t+1}\right)=\frac{1}{t+1}$$

Logo, teremos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+t}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{t+1}=1$$

17.

$$\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}=$$

Simplificando, temos:

$$\frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}=\frac{(x-9)(x+9)}{\sqrt{x}-3}=\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)(x+9)}{\sqrt{x}-3}=(\sqrt{x}+3)(x+9)$$

Assim:

$$\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to 9}(\sqrt{x}+3)(x+9)=108$$

18.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^{-1}+3^{-1}}{h}=$$

Simplificando, temos que:

$$\frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}=\frac{\frac{1}{3+h}-\frac{1}{3}}{h}=\frac{\frac{3-h-3}{3(3+h)}}{h}=\frac{\frac{-h}{3(3+h)}}{h}=\frac{-1}{3(h+3)}$$

Assim:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^{-1}+3^{-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{3(h+3)}=\frac{-1}{9}$$

19.

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right)=$$

Simplificando, temos que:

$$\left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}-1\right)=\frac{1}{t}\left(\frac{1-\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}}\right)\frac{1+\sqrt{1+t}}{1+\sqrt{1+t}}$$

$$=\frac{1}{t}\left(\frac{1-(1+t)}{(\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+t})}\right)=\frac{1}{t}\left(\frac{-t}{(\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+t})}\right)$$

$$=\frac{-1}{(\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+t})}$$

Assim:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{-1}{(\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+t})}=\frac{-1}{2}$$

20.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}=$$

Simplificando, temos que: $\frac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})}=\frac{\sqrt{x}+x-x^2-x^2\sqrt{x}}{1-x}=\frac{x(1-x)+\sqrt{x}(1-x^2)}{(1-x)}=$ $\frac{x(1-x)+\sqrt{x}(1-x)(1+x)}{(1-x)}=x+\sqrt{x}(1+x)$

Assim,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}x+\sqrt{x}(1+x)=3$$

21.

$$\lim_{x\to -4}|x+4|=$$

Temos que analisar os limites superior e inferior:

Superior: $\lim_{x\to -4^+}+x+4=0$

Inferior: $\lim_{x\to -4^-}-x+4=0$

Os limites laterais são iguais, logo, $\lim_{x\to -4}|x+4|=0$

22.

$$\lim_{x\to -4^-}\frac{|x+4|}{x+4}=$$

Tendo que:

$$\lim_{x\to -4^-}\frac{|x+4|}{x+4}=\frac{-x-4}{x+4}$$

Então:

$$\lim_{x\to -4^-}\frac{|x+4|}{x+4}=\frac{-x-4}{x+4}=-1$$

23.

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x+2|}{x+2}=$$

Temos que analisar os limites superior e inferior:

Superior: $\lim_{x\to 2^+}\frac{|x+2|}{x+2}=\frac{x+2}{x+2}=1$

Inferior: $\lim_{x\to 2^\pm}\frac{|x+2|}{x+2}=\frac{-x-2}{x+2}=-1$

Os limites laterais são diferentes, logo, não existe tal limite.

24.

$$\lim_{x\to 1.5}\frac{2x^2-3x}{|2x+3|}=$$

Temos que analisar os limites superior e inferior:

Superior: $\lim_{x\to 1.5^+}\frac{2x^2-3x}{|2x-3|}=\lim_{x\to 1.5^+}\frac{x(2x-3)}{|2x-3|}=\lim_{x\to 1.5^+}\frac{x(2x-3)}{+2x-3}=1.5$

Inferior: $\lim_{x\to 1.5^-}\frac{2x^2-3x}{|2x-3|}=\lim_{x\to 1.5^-}\frac{x(2x-3)}{|2x-3|}=\lim_{x\to 1.5^-}\frac{x(2x-3)}{-2x+3}=-\ 1.5$

Os limites laterais são diferentes, logo, não existe tal limite.

25.

$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}\left(\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{3-x}+1}\right)\left(\frac{\sqrt{6-x}+2}{\sqrt{6-x}+2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(6-x-4)(\sqrt{3-x}+1)}{(3-x-1)(\sqrt{6-x}+2)}=$

$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{3-x}+1)}{(\sqrt{6-x}+2)}=\frac{(\sqrt{3-2}+1)}{(\sqrt{6-2}+2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

26.

$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+ax+a+3}{(x-1)(x+2)}$

Fatorando o numerador para que não haja indeterminação:

$$3x^2+ax+a+3=0$$

$$\Delta = a^2 - 4.3.(a+3)$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 12.(a+3)}}{6} \quad \begin{cases} \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 12.(a+3)}}{6} = -2 \\ \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 12.(a+3)}}{6} = -2 \end{cases}$$

$$-a + \sqrt{a^2 - 12.(a+3)} = -12 \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt{a^2 - 12.(a+3)}\right)^2 = (-12+a)^2$$

$$a^2 - 12.(a+3) = 144 - 24a + a^2 \quad \rightarrow \quad 12a = 180 \quad \rightarrow \quad a = 15$$

Calculando o valor do limite:

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + 15x + 15 + 3}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + 15x + 18}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(3x+9)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(3x+9)}{(x-1)} = \frac{(3(-2)+9)}{(-2-1)} = \frac{3}{-3} = -1$$

1.5. Limites no infinito

---

27. $\lim_{x\to\infty} \frac{(3x^2 - x + 4)/x^2}{(2x^2 + 5x - 8)/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(3 - 1/x + 4/x^2)}{(2 + 5/x - 8/x^2)} = \frac{3}{2}$

28. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{12x^3 - 5x + 2}{x^3}}{\frac{1 + 4x^2 + 3x^3}{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{12 - 5/x^2 + 2/x}{1/x^3 + 4/x + 3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = 2$

29. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(2 + 3/x)} = 0$

30. $\lim_{x\to\infty} \frac{x(3 + 5/x)}{x(1 - 4/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 + 5/x}{1 - 4/x} = 3$

31. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1/x^2 - 1/x - 1)}{x^2(2 - 7/x^2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1/x^2 - 1/x - 1}{2 - 7/x^2} = -\frac{1}{2}$

32. $\lim_{y\to\infty} \frac{y^2(2/y^2 - 3)}{y^2(5 + 4/y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{2/y^2 - 3}{5 + 4/y} = -\frac{3}{5}$

33. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1 + 5/x^2)}{x^3(2 - 1/x + 4/x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + 5/x^2}{2 - 1/x + 4/x^2} = \frac{1}{2}$

34. $\lim_{t\to-\infty} \frac{t^3(1/t + 2/t^3)}{t^3(1 + 1/t - 1/t^3)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1/t + 2/t^3}{1 + 1/t - 1/t^3} = 0$

35. $\lim_{u\to\infty} \frac{4u^4 + 5}{2u^4 - 5u^2 + 2} = \lim_{u\to\infty} \frac{u^4(4 + 5/u^4)}{u^4(2 - 5/u^2 + 2/u^4)} = \frac{4}{2} = 2$

36. $\lim_{x\to\infty} \frac{x(1+2/x)}{\sqrt{x^2(9+1/x^2)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+2/x}{\sqrt{(9+1/x^2)}} = \frac{1}{3}$

37. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^6(9-1/x^5)}}{x^3(1+1/x^3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{(9-1/x^5)}}{(1+1/x^3)} = 3$

38. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^6(9-1/x^5)}}{x^3(1+1/x^3)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{(9-1/x^5)}}{(1+1/x^3)} = -3$

39. $\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{9x^2+x}-3x).(\sqrt{9x^2+x}+3x)}{(\sqrt{9x^2+x}+3x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2+x-9x^2}{\sqrt{x^2(9+1/x)}+3x} = \frac{1}{6}$

40. $\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2+2x}).(x-\sqrt{x^2+2x})}{(x-\sqrt{x^2+2x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x^2-2x}{(x-\sqrt{x^2(1+2/x)}}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{(x+x\sqrt{(1+2/x)}} = \frac{-2}{2} = -1$

41. $\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}).(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx})}{(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+ax-x^2-bx}{(\sqrt{x^2(1+a/x)}+\sqrt{x^2(1+b/x)}} =$

limx→∞x(a – b)x(1 + a/x + 1 + b/x) = a – b2

42. $\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{\frac{x.x}{x}}) = \lim_{x\to\infty} x(1 - \sqrt{\frac{1}{x}}) = \infty$

43. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$

44. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$

45. $lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+x^3+x^5}{x^5}}{\frac{1-x^2+x^4}{x^5}} = lim_{x\to\infty} \frac{1/x^4+1/x^2+1}{1/x^5-1/x^3+1/x} = \infty$

46. $lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3-2x+3}{x^3}}{\frac{5-2x^2}{x^3}} = lim_{x\to\infty} \frac{1-2/x^2+3/x^3}{5/x^3-2/x} = \infty$

47. $lim_{x\to-\infty} x^5(1/x + 1) = -\infty$

1.6. Outros limites

---

48. $\lim_{x\to 0} \frac{sen3x}{x} * \frac{3}{3} = \lim_{x\to 0} \frac{sen3x}{3x} * 3 = 1 * 3 = 3$

49.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\ 4x}{sen\ 6x}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to 0} sen\ 4x}{\lim\limits_{x\to 0} sen\ 6x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\ 4x}{4x}\cdot 4x}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\ 6x}{6x}\cdot 6x}=\frac{1\cdot 4x}{1\cdot 6x}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

50.

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\tan 6t}{sen\ 2t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{sen\ 6t}{\cos 6t}}{sen\ 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{6t}{6t}\cdot\frac{sen\ 6t}{\cos 6t}}{\frac{2t}{2t}\cdot sen\ 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{sen\ 6t}{6t}\cdot\frac{6t}{\cos 6t}}{\frac{sen\ 2t}{2t}\cdot 2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{sen\ 6t}{6t}}{\frac{sen\ 2t}{2t}}\cdot\frac{\frac{6t}{\cos 6t}}{2t}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{sen\ 6t}{6t}}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{sen\ 2t}{2t}}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{3}{\cos 6t}=\frac{1}{1}\cdot 3=\mathbf{3}$$

51.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{sen\ \theta}=\frac{\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta-1}{\lim\limits_{\theta\to 0} sen\ \theta}=\frac{\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta}\cdot\theta}{\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{sen\ \theta}{\theta}\cdot\theta}=\frac{0\cdot\theta}{\theta}=\mathbf{0}$$

52.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{sen(\cos\theta)}{\sec\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{sen(\cos\theta)}{\sec\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\cos\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{sen(\cos\theta)}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sec\theta}=\lim_{\theta\to 0} cos^2\theta=\mathbf{1}$$

53.

$$\lim_{t\to 0}\frac{sen^2 3t}{t^2}=\left(\lim_{t\to 0}\frac{sen\ 3t}{t}\right)^2=\left(\lim_{t\to 0}\frac{sen\ 3t}{3t}\cdot 3\right)^2=3^2=\mathbf{9}$$

54.

$$\lim_{x\to 0}\frac{cotg\ 2x}{cossec\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{tg\ 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{2tg\ x\big/1-tg^2x}=\lim_{x\to 0} sen\ x\cdot\frac{(1-tg^2x)}{2(^{sen\ x}/_{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0} sen\ x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-tg^2x)\cdot\frac{\cos x}{sen\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot(1-tg^2x)\cdot\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

55.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sen\ x-\cos x}{\cos 2x}=$$

$$*\ \cos 2x=cos^2x-sen^2x=(\cos x-senx)\cdot(\cos x-sen\ x)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{sen\, x - \cos x}{(\cos x - sen\, x)\cdot(\cos x + sen\, x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{sen\, x - \cos x}{-(sen\, x - \cos x)\cdot(\cos x + sen\, x)}$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{sen\, x + \cos x} = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$$

56.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2} = \boldsymbol{e^2}$$

57.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{4} = \boldsymbol{e^4}$$

58.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n} =$$

$$*\, y = \frac{4}{n} \therefore n \to \infty \; e \;\; y \to 0 = \lim_{y\to 0}(1+y)^{4/y} = \left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}\right)^{4} = \boldsymbol{e^4}$$

59.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n} =$$

$$*\, y = \frac{1}{3n} \therefore n \to \infty \; e \;\; y \to 0$$

$$= \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/3y} = \left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}\right)^{1/3} = \boldsymbol{e^{1/3}}$$

60.

Provar: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} =$$

$$*\, y = \frac{x}{n} \therefore n \to \infty \; e \;\; y \to 0$$

$$= \lim_{y\to 0}(1+y)^{x/y} = \left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}\right)^{x} = \boldsymbol{e^x}, para\ x > 0.$$

1.7. Continuidade

61.

$$f(x) = x^2 + \sqrt{7-x}, a = 4$$

$$1.\ \boldsymbol{a}\ está\ no\ domínio\ de\ \boldsymbol{f};$$

$$2.\ \lim_{x\to a}\left(x^2+\sqrt{7-x}\right) = \lim_{x\to 4}\left(x^2+\sqrt{7-x}\right) = \lim_{x\to 4}\left(16+\sqrt{3}\right) = 16+\sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\ \ existe.$$

$$3.\ f(x) = x^2+\sqrt{7-x} = (4)^2+\sqrt{7-4} = 16+\sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

62.

$$f(x) = (x+2x^3)^4, a = -1$$

$$1.\ \boldsymbol{a}\ está\ no\ domínio\ de\ \boldsymbol{f};$$

$$2.\ \lim_{x\to a}(x+2x^3)^4 = \lim_{x\to -1}(x+2x^3)^4 = \lim_{x\to -1} 81 = 81$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\ \ existe.$$

$$3.\ f(x) = (x+2x^3)^4 = (-1+2(-1)^3)^4 = (-3)^4 = 81$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

63.

$$g(x) = \frac{x+1}{2x^2-1}, a = 4$$

$$1.\ \boldsymbol{a}\ está\ no\ domínio\ de\ \boldsymbol{g};$$

$$2.\ \lim_{x\to a}\frac{x+1}{2x^2-1} = \lim_{x\to 4}\frac{x+1}{2x^2-1} = \lim_{x\to 4}\frac{5}{31} = \frac{5}{31}$$

$$\lim_{x\to a} g(x)\ \ existe.$$

$$3.\ g(x)=\frac{x+1}{2x^2-1}=\frac{4+1}{2\cdot(4)^2-1}=\frac{5}{31}$$

$$\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

64.

$$f(x)=\ln|x-2|\,,a=2$$

$$f(x)\text{é } descontínua\ em\ a=2\ porque\ não\ existe\ \ln 0.$$

65.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}\ se\ x\neq 1 \\ 2\ se\ x=1\end{cases}\quad a=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0{,}00\ldots 1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-0{,}00\ldots 1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$f(x)\text{é } descontínua\ em\ a=1\ porque\ não\ existe\ \lim_{x\to 1} f(x).$$

66.

$$f(x)=\begin{cases}e^x\ se\ x<0 \\ x^2\ se\ x\geq 0\end{cases}\ a=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2=0^2=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=e^0=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$$f(x)\text{é } descontínua\ em\ a=0\ porque\ não\ existe\ \lim_{x\to 0} f(x).$$

67.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\ se\ x\neq 1 \\ 1\ se\ x=1\end{cases}\ a=1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$f(x)$ é $descontínua\ em\ a = 1\ porque\ f(x) \neq \lim_{x\to 1} f(x)$.

68.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 12}{x+3}\ se\ x \neq -3 \\ -5\ se\ x = -3 \end{cases} \quad a = -3$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\cdot(x-4)}{(x+3)} = \lim_{x\to -3} (x-4) = -7$$

$$f(x)\text{ é } descontínua\ em\ a = -3\ porque\ f(x) \neq \lim_{x\to -3} f(x)\,.$$

69.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2\ se\ x < 1 \\ 4 - x\ se\ x \geq 1 \end{cases} \quad a = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (4 - x) = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1 + x^2) = 2$$

$$f(x)\text{é } decontínua\ em\ a = 1\ porque\ \lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x).$$

2. DERIVADA

2.1. Definições

1.

$$f(x) = 3 - 2x + 4x^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{3 - 2\cdot(x+h) + 4\cdot(x+h)^2 - (3 - 2x + 4x^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3 - 2x - 2h + 4x^2 + 8xh + 4h^2 - 3 + 2x - 4x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 4h + 8x - 2 = \mathbf{8x - 2} \end{aligned}$$

2.

$$f(t) = t^4 - 5t$$

$$f'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(t+h)^4 - 5(t+h) - (t^4 - 5t)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{t^4 + 4t^3h + 6t^2h^2 + 4th^3 + h^4 - 5t - 5h - t^4 + 5t}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 4t^3 + 6t^2h + 4th^2 + h^3 - 5 = \mathbf{4t^3 - 5}$$

3.

$$f(t) = \frac{2t+1}{t+3}$$

$$f'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(t+h)+1}{t+h+3} - \frac{2t+1}{t+3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(t+3)[2(t+h)+1] - (t+h+3)(2t+1)}{(t+h+3)(t+3)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2t^2 + 2th + 7t + 6h + 3 - (2t^2 + 2th + 7t + h + 3)}{t^2 + th + 6t + 3h + 9}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{5h}{t^2 + th + 6t + 3h + 9}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{5}{t^2 + th + 6t + 3h + 9}$$
$$= \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{t^2 + 6t + 9}}$$

4. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$

$$f'(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{x^2-1}{x-2} - \frac{a^2-1}{a-2}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{ax^2 - a - 2x^2 + 2 - a^2x + x + 2a^2 - 2}{(x-2)(a-2)}}{x-a}$$
$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{ax(x-a) - 2(x^2 - a^2) + (x-a)}{(x-2)(a-2)}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{(x-a)[ax - 2(x+a) + 1]}{(x-2)(a-2)}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{ax - 2(x+a) + 1}{(x-2)(a-2)} = \frac{\mathbf{a^2 - 4a + 1}}{\mathbf{(a-2)^2}}$$

2.3. Derivadas de Funções Polinomiais e da Função Exponencial Natural

---

5. $F(x) = -4x^{10}$

$F'(x) = -4.(10)x^{(10-1)} = \mathbf{-40x^9}$

6. $g(x) = 5x^8 - 2x^5 + 6$

$g'(x) = 5.8x^{(8-1)} - 2.5x^{(5-1)} = \mathbf{40x^7 - 10x^4}$

7. $f(t) = \frac{1}{2}t^6 - 3t^4 + t$

$f'(t) = \frac{1}{2}.6t^{(6-1)} - 3.4t^{(4-1)} + 1t^{(1-1)} = \mathbf{3t^5 - 12t^3 + 1}$

8. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V'(r) = \frac{4}{3}\pi.3r^{(3-1)} = \mathbf{4\ \pi r^2}$

9. $Y(t) = 6t^{-9}$

$Y'(t) = 6.(-9)t^{(-9-1)} = \mathbf{-54t^{-10}}$

10. $R(t) = 5t^{(-3/5)}$

$R'(t) = 5.(-3/5)t^{(-3/5-1)} = \mathbf{-3t^{(-8/5)}}$

11. $y = \sqrt[3]{x}$

$y' = \frac{1}{3}x^{(\frac{1}{3}-1)} = \mathbf{\frac{1}{3}x^{(-2/3)}}$

12. $R(x) = \frac{\sqrt{10}}{x^7}$

$R'(x) = \sqrt{10}.(-7).x^{(-7-1)} = \mathbf{-7\sqrt{10}\ x^{-8}}$

13. $y = \frac{4x^4}{x^{-5}} = 4x^9$

$y' = 4.9x^{(9-1)} = \mathbf{36x^8}$

14. $F(x) = \sqrt{x^5} = x^{5/2}$

$F'(x) = \frac{5}{2}x^{(\frac{5}{2}-1)} = \mathbf{\frac{5}{2}x^{(3/2)}}$

15. $y = 5e^x + 3$

y' = $\mathbf{5e^x}$

16. G(x) = $\sqrt{x}$ - 2e^x

G'(x) = $\frac{1}{2}x^{(\frac{1}{2}-1)}$ - 2e^x = $\mathbf{\frac{1}{2}x^{-1/2}}$ **- 2e^x**

17. y = ae^v+$\frac{b}{v}+\frac{c}{v^2}$

y' = ae^v-b$v^{(-1-1)}-2c^{(-2-1)}$ = **ae^v-b$v^{-2}-2cv^{-3}$**

18. y = $e^{x+1}+1$

y' = $e^{x+1}.1$ = $\mathbf{e^{x+1}}$

2.4. As Regras do Produto e do Quociente

---

19. $y = x^2e^x$

y' = (2x) e^x+$e^x x^2$ = $\mathbf{xe^x(x+2)}$

20. $f(t) = (t^6-3t^4+t)(t^4+8)$

$f'(t) = \left(6t^{(6-1)} - 3.4t^{(4-1)} + 1.t^{(1-1)}\right)(t^4+8) + (t^6-3t^4+t)4t^{(4-1)}$

= $(6t^5-12t^3+1)(t^4+8)+(t^6-3t^4+t)4t^3$= **$10t^9$-$24t^7$+$48t^5$+$5t^4$-$96t^3$+8**

21. y = $e^x(x^5-20x^3+50x)$

y' = $e^x(x^5-20x^3+50x)+e^x(5x^{(5-1)}-20.3x^{(3-1)}+50.1x^{(1-1)})$

= $\mathbf{e^x(x^5+5x^4-20x^3-60x^2+50x+50)}$

22. $f(x) = (e^x-5x)(5x^8-2x^5+6)$

$f'(x) = \left(e^x-5x^{(1-1)}\right)(5x^8-2x^5+6) + (e^x-5x)(5.8x^{(8-1)}-2.5x^{(5-1)})$

=$(e^x-5)(5x^8-2x^5+6) + (e^x-5x)(40x^7-10x^4)$

= $\mathbf{e^x\left(5x^8+40x^7-2x^5-10x^4+6\right)-225x^8+60x^5-30}$

23. $y = \frac{e^x}{x^2}$

$y' = \frac{e^x x^2 - 2xe^x}{x^4} = \frac{\mathbf{e^x(x-2)}}{\mathbf{x^3}}$

24. $y = \frac{x^2+4x+3}{x^2+3x-4}$

$y' = \frac{(2x+4)(x^2+3x-4)-(x^2+4x+3)(2x+3)}{(x^2+3x-4)^2} = \frac{\mathbf{-x^2-14x-25}}{\mathbf{(x^2+3x-4)^2}}$

25. $y = \frac{\sqrt{x}-2e^x}{\sqrt{x}}$

$y' = \frac{\left(\frac{1}{2}x^{\left(-\frac{1}{2}\right)} - 2e^x\right)\sqrt{x} - (\sqrt{x}-2e^x)\frac{1}{2}x^{\left(-\frac{1}{2}\right)}}{x} = \frac{\frac{1}{2} - 2e^x\sqrt{x} - \frac{1}{2} + e^x x^{\left(-\frac{1}{2}\right)}}{x} = \frac{-2e^x\sqrt{x} + e^x x^{\left(-\frac{1}{2}\right)}}{x} =$
$\frac{-2e^x\sqrt{x} + e^x x^{\left(-\frac{1}{2}\right)}}{x} = \frac{\mathbf{e^x(-2\sqrt{x} + x^{\left(-\frac{1}{2}\right)})}}{\mathbf{x}}$

26. $y = \frac{x^2-2\sqrt{x}}{e^{x+1}+1}$

$y' = \frac{(2x-x^{-1/2})(e^{x+1}+1)-(x^2-2\sqrt{x})(e^{x+1})}{(e^{x+1}+1)^2} = \frac{(2x-x^{-1/2})(e^{x+1}+1)-(x^2-2\sqrt{x})(e^{x+1})}{(e^{x+1}+1)^2}$

$= \frac{\mathbf{e^{x+1}\left(2x-x^{-\frac{1}{2}}-x^2+2\sqrt{x}\right)+(2x-x^{-1/2})}}{\mathbf{(e^{x+1}+1)^2}}$

2.5. Derivadas de Função Trigonométrica, Exponenciais e Logarítmicas

---

27. $f(x) = x - 3\sin x$

$f'(x) = \mathbf{1 - 3\cos x}$

28. f(x) = x*sen(x)

Neste caso, aplica-se a **regra do produto**:

f(x)’ = sen(x) * $\frac{d}{dx}$ (x) + x * $\frac{d}{dx}$ $(sen(x))$

f(x)’ = sen(x) + x*cos(x)

29. y = $\boldsymbol{sen(x)}$ + 10*$\boldsymbol{tan(x)}$

y' = $\frac{d}{dx}\ (sen(x) +\ 10 * \tan(x))$

y' = $\frac{d}{dx}\ (sen(x))$ + 10*$\frac{d}{dx}\ (tan(x))$

y' = $cos(x)$ + 10*$\sec^2 x$

30. y = 2*$\mathbf{csc}\ \boldsymbol{x}$ + 5*$\mathbf{cos}\ \boldsymbol{x}$

y' = 2* $\frac{d}{dx}\ (csc(x))$ + 5*$\frac{d}{dx}\ (cos(x))$

y' = 2*(- csc(x)*cotg(x)) + 5(- sen(x))

y' = -2csc(x)cotg(x) – 5sen(x)

31. y = $\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{cos}\ (\boldsymbol{x})}$

Neste caso, aplica-se a regra do quociente:

y' = $\frac{cos(x) * \frac{d}{dx}(x) - x * \frac{d}{dx}(cos(x))}{[cos(x)]^2}$

y' = $\frac{\cos(x) - x\ (-sen(x))}{[\cos(x)]^2}$

y' = $\frac{\cos(x)\ + x * sen(x))}{\cos^2(x)}$

32.y = $\frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{sen(x)}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{cos}\ (\boldsymbol{x})}$

Neste caso, aplica-se a regra do quociente:

y' = $\frac{((\mathrm{x} * \cos(x)) * \left(\frac{d}{dx}\left(1+sen(x)\right)\right) - \left(1+sen(x)\right) * (\frac{d}{dx}\left(x+cos(x)\right))}{[\mathrm{x}+\cos(x)]^2}$

y' = $\frac{[(\mathrm{x} * \cos(x)) * (0+\cos(x))] - [(1+sen(x)) * (1-sen(x)]}{[\mathrm{x}+\cos(x)]^2}$

y' = $\frac{(\mathrm{x} * \cos(x)) * \cos(x) - [(1-sen^2(x)]}{[\mathrm{x}+\cos(x)]^2}$

$y' = \frac{(x*\cos(x))*\cos(x) - \cos^2(x)]}{[x+\cos(x)]^2}$

33. $f(\theta) = \frac{\boldsymbol{sec\ (\theta)}}{\boldsymbol{1+sec(\theta)}}$

f(θ) = Neste caso, aplica-se a regra do quociente:

$$y' = \frac{((1+\sec(x))*\left(\frac{d}{dx}(sec(x))\right) - (sec(x))*(\frac{d}{dx}(1+sec(x)))}{[1+\sec(x)]^2}$$

$$y' = \frac{(1+\sec(x))*(\sec(x)*\tan(x)) - (sec(x))*(0+\sec(x)*\tan(x))}{[1+\sec(x)]^2}$$

$$y' = \frac{(1+\sec(x))*(sec(x)*\tan(x)) - (sec^2(x)*\tan(x))}{[1+\sec(x)]^2}$$

34. $y = \frac{\boldsymbol{tan(x)-1}}{\boldsymbol{sec(x)}}$

Pode-se utilizar a regra do quociente, como nos exemplos anteriores. Mas também podemos recorrer à regra do produto ao transformar a equação anterior nesta:

y = (tan(x)-1)*cos(x)

Assim, pode-se aplicar a regra do produto:

$y' = [(\tan(x)-1) * \frac{d}{dx}(\cos(x))] + [\cos(x) * \frac{d}{dx}(\tan(x) - 1)]$

$y' = (\tan(x)-1)*(-\text{sen}(x)) + \cos(x) * (\sec^2(x) - 0)$

$y' = -(\tan(x)-1)\text{sen}(x) + \cos(x)\sec^2(x)$

$y' = \sec(x) - \text{sen}(x)(\tan(x)-1)$

2.6. Regra da Cadeia

35. F(x) = sen 4x

Como a função é composta, é necessário utilizar a regra da cadeia.

$F'(x) = \frac{d}{dx}(sen\ 4x)$

$F'(x) = \cos(4x) * (\frac{d}{dx}(4x))$

F'(x) = 4cos(4x)

36.F(x) = $\sqrt{\mathbf{4+3}\boldsymbol{x}}$

F'(x) = $\frac{d}{dx}$ ($\sqrt{\mathbf{4+3}\boldsymbol{x}}$)

Assim, fazemos: $\frac{d}{dx}$ ($\sqrt{\mathbf{4+3}\boldsymbol{x}}$) = $\frac{d\sqrt{u}}{dx}\frac{du}{dx}$, onde:

u = 3x+4 e $\frac{d\sqrt{u}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$:

F'(x) = $\frac{\frac{d}{dx}(4+\mathbf{3}\boldsymbol{x})}{2\sqrt{\mathbf{4+3}\boldsymbol{x}}}$

F'(x) = $\frac{(0+\mathbf{3})}{2\sqrt{\mathbf{4+3}\boldsymbol{x}}}$

F'(x) = $\frac{\mathbf{3}}{2\sqrt{\mathbf{4+3}\boldsymbol{x}}}$

37. F(x) = $(x^3 + 4x)^7$

F'(x) = $\frac{d}{dx}(x^3 + 4x)^7$

Utiliza-se a regra da cadeia.

F'(x) = $7(x^3 + 4x)^6 * (\frac{d}{dx}(x^3 + 4x))$

F'(x) = $7(x^3 + 4x)^6 (3x^2 + 4)$

38. F(x) = $(x^2 - x + 1)^3$

F'(x) = $\frac{d}{dx}(x^2 - x + 1)^3$

De modo similar a questão anterior, também utiliza-se a regra da cadeia.

F'(x) = $3(x^2 - x + 1)^2 * \frac{d}{dx}(x^2 - x + 1)$

F'(x) = $3(x^2 - x + 1)^2 (2x - 1)$

39. y = $\cos(a^3 + x^3)$

y' = $\frac{d}{dx} cos(a^3 + x^3)$

y' = $-\text{sen}(a^3 + x^3)* \frac{d}{dx}(a^3 + x^3)$

y' = -sen(a^3 + x^3) * [$\frac{d}{dx}$ (a^3)+ $\frac{d}{dx}$ (x^3)]

y' = -sen(a^3 + x^3) [3x^2 + 3a^2 * $\frac{d}{dx}$ (a)]

40. y = a^3 + $\cos^3 x$

y' = $\frac{d}{dx}$ a^3 + $\frac{d}{dx}$ $\cos^3 x$

Usando a regra da cadeia no segundo termo:

y' = 3a^2 + 3$\cos^2$(x)*(-sen(x))

41. y = xe^{-x^2}

Usando a regra do produto:

y' = e^{-x^2} * ($\frac{d}{dx}$ (x)) + x * ($\frac{d}{dx}$ e^{-x^2})

Usando a regra da cadeia:

y' = x*(e^{-x^2}*($\frac{d}{dx}$ (-x^2))) + e^{-x^2}*($\frac{d}{dx}$ (x))

y' = e^{-x^2} - e^{-x^2} * x * (2x)

42. y = 10^{1-x^2}

Usando a regra da cadeia:

y' = 10^{1-x^2} * ln(10) * ($\frac{d}{dx}$ (1) - $\frac{d}{dx}$ (x^2))

y' = -10^{1-x^2} * (2x) * ln(10)

43. y = ln(x^2 + 10)

Usando a regra da cadeia:

= $\frac{d\ ln(u)}{du}\frac{du}{dx}$ onde u = x^2+10 ; $\frac{d \ln(u)}{du} = \frac{1}{u}$

y' = $\frac{\frac{d}{dx}(x^2+10)}{x^2+10}$

y' = $\frac{2x}{x^2+10}$

44. $y = \ln_2(1\text{-}3x)$

$y' = \frac{\frac{d}{dx}(\log(1-3x))}{\log(2)}$

Usando a regra da cadeia:

$\frac{d\,log(u)}{du}\frac{du}{dx}$ onde $u = 1 – 3x$; $\frac{d\,log(u)}{du} = \frac{1}{u}$

$y' = \frac{\frac{\frac{d}{dx}(1-3x)}{1-3x}}{\log(2)}$

$y' = \frac{\frac{d}{dx}(1) - 3\frac{d}{dx}(x)}{(1-3x)\log(2)}$

$y' = \frac{-3}{(1-3x)\log(2)}$

45. $y = \cos(\ln x)$

Usando a regra da cadeia:

$\frac{d}{dx}(\cos(\ln(x))) = \frac{d\,cos(u)}{du}\frac{du}{dx}$, onde $u = \ln(x)$; $\frac{d\cos(u)}{du} = -\text{sen}(u)$

$y' = \text{sen}(\ln(x))(-(\frac{d}{dx}(\ln(x))))$

$y' = -\frac{1}{x}\text{sen}(\ln(x))$

46. $x = y * \ln(1+e^x)$

Usando a regra do produto:

$x' = \ln(e^y+1)(\frac{d}{dy}(y)) + y(\frac{d}{dy}(\ln(e^y+1)))$

Usando a regra da cadeia:

$\frac{d}{dy}(\ln(e^y+1)) = \frac{d\,ln(u)}{du}\frac{du}{dy}$, onde $u = e^y + 1$; $\frac{d\,ln(u)}{du} = \frac{1}{u}$

$x' = \frac{y(\frac{d}{dy}(e^y) + \frac{d}{dy}(1)}{e^y+1} + \ln(e^y+1)(\frac{d}{dy}(y))$

$x' = \frac{y(\frac{d}{dy}(e^y) + 0)}{e^y+1} + \ln(e^y+1)(\frac{d}{dy}(y))$

$x' = \ln(e^y+1)(\frac{d}{dy}(y)) + \frac{y(e^y)}{e^y+1}$

$x' = \frac{e^y * y}{e^y+1} + \ln(e^y+1)$

47. y = x * ln(x)

Usando a regra do produto:

y' = ln(x) $(\frac{d}{dx}(x))$ + x * $(\frac{d}{dx}$(ln(x))

y' = ln(x) $(\frac{d}{dx}\ (x)) + x * \frac{1}{x}$

y' = ln (x) + 1

48. y = $\frac{\mathbf{ln}\ (x)}{x^2}$

Usando a regra do produto:

y' = ln(x)$(\ \frac{d}{dx}\ (\frac{1}{x^2})) + \frac{\frac{d}{dx}(\ln(x))}{x^2}$

y' = ln(x)$(\ \frac{d}{dx}\ (\frac{1}{x^2})) + \frac{\frac{1}{x}}{x^2}$

y' = $\frac{1}{x^3}$ - $\frac{2\ \ln\ (x)}{x^3}$

y' = $\frac{1 - 2\ \ln\ (x)}{x^3}$

49. y = $\log_{10}$(x)

y' = $\frac{d}{dx}\left(\frac{\log(x)}{\log(10)}\right)$

y' = $\frac{\frac{d}{dx}(\log(x))}{\log(10)}$

y' = $\frac{1}{x * \log(10)}$

50. y = ln(sec (x) + tg (x))

Usando a regra da cadeia:

$\frac{d}{dx}$(ln(sec (x) + tg (x))) = $\frac{d\ ln(u)}{du}\frac{du}{dx}$, onde u = tg(x) + sec(x) ; $\frac{d\ \ln\ (u)}{du} = \frac{1}{u}$

y' = $\frac{\frac{d}{dx}(\sec\ (x) + \mathrm{tg}\ (x))}{\sec\ (x) + \mathrm{tg}\ (x)}$

y' = $\frac{\frac{d}{dx}(\sec\ (x)) + \frac{d}{dx}(\mathrm{tg}\ (x))}{\sec\ (x) + \mathrm{tg}\ (x)}$

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}(\text{tg}\,(x)) + \text{tg}\,(x) * \sec\,(x)}{\sec\,(x) + \text{tg}\,(x)}$$

$$y' = \frac{\sec^2(x) + \text{tg}\,(x) * \sec\,(x)}{\sec\,(x) + \text{tg}\,(x)}$$

2.7. Aplicações de Derivação

51. Se $f(x) = 3x^2 - 5x$, encontre $f'(2)$ e use-o para achar uma equação da reta tangente à parábola $y = 3x^2 - 5x$ no ponto (2,2).

Temos que a derivada é: $f'(x) = 6x - 5$.

$f'(2) = 6*2 - 5$

$f'(2) = -7$.

Assim, uma equação da reta tangente, é:

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m*(x - x_0) = (y - y_0)$

$-7*(x - 2) = (y - 2)$

$-7x + 14 = y - 2$

$y = -7x + 12$.

52. Temos que a derivada de $g(x) = 1 - x^3$ é: $g'(x) = -3x^2$

$$g'(0) = -3(0)^2 = 0$$

Assim, uma equação da reta tangente, é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

$$m \cdot (x - x_0) = (y - y_0)$$

$$0 \cdot (x - 0) = (y - 1)$$

$$y = 1$$

53. Assim, uma equação da reta tangente, é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3-2)}{(4-0)} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0) \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = (\mathrm{y} - \mathrm{f}(\mathrm{x}_0))$$

$$\mathrm{m} \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = (\mathrm{y} - \mathrm{y}_0)$$

Dessa forma:

$$f'(4) = m = \frac{1}{4} \qquad\qquad f(4) = y_0 = 3$$

54. Temos que a derivada de $\mathrm{y} = 1 + 2\mathrm{x} - \mathrm{x}^3$ é: $\mathrm{y}' = 2 - 3\mathrm{x}^2$

$$\mathrm{y}'(1) = 2 - 3(1)^2 = -1$$

Assim, uma equação da reta tangente, é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

$$\mathrm{m} \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = (\mathrm{y} - \mathrm{y}_0)$$

$$(-1) \cdot (\mathrm{x} - 1) = (\mathrm{y} - 2)$$

$$\mathrm{y} = -\mathrm{x} + 3$$

55. Temos que a derivada de $\mathrm{y} = \sqrt{2x+1} = (2\mathrm{x}+1)^{\frac{1}{2}}$ é:

$$\mathrm{y}' = \frac{1}{2}(2\mathrm{x}+1)^{\frac{-1}{2}}(2) = (2\mathrm{x}+1)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\mathrm{y}'(4) = (2 \cdot 4 + 1)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

Assim, uma equação da reta tangente, é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{m} \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = (\mathrm{y} - \mathrm{y}_0)$$

$$\frac{1}{3} \cdot (\mathrm{x} - 4) = (\mathrm{y} - 3)$$

$$\mathrm{y} = \frac{\mathrm{x}}{3} - \frac{4}{3} + 3 = \frac{\mathrm{x}}{3} + \frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad \mathrm{y} = \frac{\mathrm{x}}{3} + \frac{5}{3}$$

56. Temos que a derivada de $y = \frac{(x-1)}{(x-2)}$ é:

$$y' = \frac{(1) \cdot (x-2) - (x-1) \cdot (1)}{(x-2)^2}$$

$$y'(3) = \frac{(1) \cdot (3-2) - (3-1) \cdot (1)}{(3-2)^2} = \frac{1-2}{1} = -1$$

Assim, uma equação da reta tangente, é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

$$m \cdot (x - x_0) = (y - y_0)$$

$$-1 \cdot (x-3) = (y-2)$$

$$y = -x + 5$$

57. Temos que a derivada de $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$ é:

$$y' = \frac{(2) \cdot (x+1)^2 - (2x) \cdot (2)(x+1)(1)}{(x+1)^4} = \frac{(2) \cdot (x+1)^2 - (4x)(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$y'(0) = \frac{(2) \cdot (0+1)^2 - (4 \cdot 0)(0+1)}{(0+1)^4} = \frac{2-0}{1} = 2$$

Assim, uma equação da reta tangente, é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

$$m \cdot (x - x_0) = (y - y_0)$$

$$2 \cdot (x-0) = (y-0)$$

$$y = 2x$$

58. Para encontrar a equação da velocidade, basta derivar a equação do espaço, logo:

$$y = 40t - 16t^2 \qquad \rightarrow \qquad y' = 40 - 2 \cdot 16t = 40 - 32t$$

$$y' = v(2) = 40 - 32 \cdot 2 = -24 \ \text{pés/s}$$

59. a)

Para encontrar a equação da velocidade, basta derivar a equação do espaço, logo:

$$H = 58t - 0{,}83t^2 \qquad \rightarrow \qquad H' = 58 - 2 \cdot 0{,}83t = 58 - 1{,}66t$$

$$H' = v(1) = 58 - 1{,}66 \cdot 1 = 56{,}34\ m/s^2$$

b) Para $t = a$, temos:

$$H' = v(a) = (58 - 1{,}66 \cdot a)\ \ m/s^2$$

c) Quando $H = 0$ a flecha estará de volta a lua, assim:

$$H = 58t - 0{,}83t^2$$

$$0 = 58t - 0{,}83t^2 \qquad \rightarrow \qquad 0 = t(58 - 0{,}83t)$$

$$t = 0 \text{ ou } t = \frac{58}{0{,}83} = 69{,}87$$

A flexa voltará após 69,87 s.

d) Para $t = 69{,}87$, temos:

$$H' = v(69{,}87) = (58 - 1{,}66 \cdot 69{,}87) \cong 58/\ m/s^2$$

60. Para encontrar a equação da velocidade, basta derivar a equação do espaço, logo:

$$S = 4t^3 + 6t + 2 \qquad \rightarrow \qquad S' = V(t) = 3 \cdot 4t^2 + 6 = 12t^2 + 6$$

Para encontrar a equação da aceleração, basta derivar a equação da velocidade, logo:

$$V(t) = 12t^2 + 6 \qquad \rightarrow \qquad V'(t) = a(t) = 2 \cdot 12t = 24t$$

Para $t = a$:

$$V(a) = (12a^2 + 6)m/s \qquad \rightarrow \qquad a(a) = 2 \cdot 12a = 24a\ m/s^2$$

Para $t = 1$:

$$V(1) = (12(1)^2 + 6) = 18\ m/s \qquad \rightarrow \qquad a(1) = 2 \cdot 12 \cdot 1 = 24\ m/s^2$$

Para $t = 2$:

$$V(2) = (12(2)^2 + 6) = 54\ m/s \qquad \rightarrow \qquad a(2) = 2 \cdot 12 \cdot 2 = 48\ m/s^2$$

Para $t = 3$:

$$V(3) = (12(3)^2 + 6) = 114\ m/s \qquad \rightarrow \qquad a(3) = 2 \cdot 12 \cdot 3 = 72\ m/s^2$$

61. a)

Para encontrar a velocidade média: $\mathrm{V_m} = \dfrac{\mathrm{S(t_1) - S(t_0)}}{\mathrm{t_1 - t_0}}$

(i)

$$S(3) = 3^2 - 8 \cdot 3 + 18 = 3 \qquad\qquad S(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 18 = 2$$

$$\mathrm{V_m} = \frac{\mathrm{S(4) - S(3)}}{4 - 3} = \frac{2 - 3}{1} = -1\ \mathrm{m/s}$$

(ii)

$$S(3{,}5) = (3{,}5)^2 - 8 \cdot (3{,}5) + 18 = 2{,}25 \qquad\qquad S(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 18 = 2$$

$$\mathrm{V_m} = \frac{\mathrm{S(4) - S(3{,}5)}}{4 - 3{,}5} = \frac{2 - 2{,}25}{0{,}5} = -0{,}5\ \mathrm{m/s}$$

(iii)

$$S(5) = (5)^2 - 8 \cdot (5) + 18 = 3 \qquad\qquad S(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 18 = 2$$

$$\mathrm{V_m} = \frac{\mathrm{S(5) - S(4)}}{5 - 4} = \frac{3 - 2}{1} = 1\ \mathrm{m/s}$$

(iv)

$$S(4{,}5) = (4{,}5)^2 - 8 \cdot (4{,}5) + 18 = 2{,}25 \qquad\qquad S(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 18 = 2$$

$$\mathrm{V_m} = \frac{\mathrm{S(4{,}5) - S(4)}}{4{,}5 - 4} = \frac{2{,}25 - 2}{0{,}5} = 0{,}5\ \mathrm{m/s}$$

b) Para encontrar a equação da velocidade, basta derivar a equação do espaço, logo:

$$\mathrm{S = t^2 - 8t + 18} \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{S' = V(t) = 2t - 8}$$

$$\mathrm{V(4) = 2 \cdot 4 - 8 = 0\ m/s}$$

62. Derivando f(x) para encontrar os pontos de inflexão:

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 5 \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 2 \cdot 3x - 12 = 6x - 12$$

$$f'(x) = 0$$

$$6x - 12 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 2$$

Substituindo na função o ponto de inflexão e o intervalo, temos:

$$f(0) = 3(0)^2 - 12\ \cdot 0 + 5 = 5$$

$$f(2) = 3(2)^2 - 12\ \cdot 2 + 5 = -7$$

$$f(3) = 3(3)^2 - 12 \ \cdot 3 + 5 = -4$$

$$f(x)_{máx} = 5 \; e \; f(x)_{min} = -7$$

63. Derivando f(x) para encontrar os pontos de inflexão:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 1$$

Substituindo na função o ponto de inflexão e o intervalo, temos:

$$f(0) = (0)^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = (1)^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$$

$$f(3) = (3)^3 - 3 \cdot 3 + 1 = 19$$

$$f(x)_{máx} = 19 \; e \; f(x)_{min} = -1$$

64. Derivando f(x) para encontrar os pontos de inflexão:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3 \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 - 4x = 0 \qquad \rightarrow \qquad 4x(x^2 - 1) = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 1 \;\; ou \; x = -1 \; ou \; x = 0$$

Substituindo na função os pontos de inflexão e o intervalo, temos:

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 3 = 11$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 3 = 2$$

$$f(0) = (0)^4 - 2(0)^2 + 3 = 3$$

$$f(1) = (1)^4 - 2(1)^2 + 3 = 2$$

$$f(3) = (3)^4 - 2(3)^2 + 3 = 66$$

$$f(x)_{máx} = 66 \; e \; f(x)_{min} = 2$$

65. Derivando f(x) para encontrar os pontos de inflexão:

$$f(x) = (x^2 - 1)^3 \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 3 \cdot (x^2 - 1)^2 \cdot 2x = (x^2 - 1)^2 \cdot 6x$$

$$f'(x) = 0$$

$$(x^2 - 1)^2 \cdot 6x = 0 \quad \rightarrow \quad (x^2 - 1)^2 = 0 \; ou \; 6x = 0$$

$$x = 1 \; ou \; x = -1 \; ou \; x = 0$$

Substituindo na função os pontos de inflexão e o intervalo, temos:

$$f(-1) = ((-1)^2 - 1)^3 = 0$$

$$f(0) = ((0)^2 - 1)^3 = -1$$

$$f(1) = ((1)^2 - 1)^3 = 0$$

$$f(2) = ((2)^2 - 1)^3 = 27$$

$$f(x)_{máx} = 27 \; e \; f(x)_{min} = -1$$

66. Derivando f(x) para encontrar os pontos de inflexão:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - x^2 = 0 \; e \; (x^2 + 1)^2 \neq 0$$

$$x = 1 \; ou \quad \underbrace{x = -1}_{fora\ do\ intervalo}$$

Substituindo na função os pontos de inflexão e o intervalo, temos:

$$f(0) = \frac{0}{(0)^2 + 1} = 0$$

$$f(1) = \frac{1}{(1)^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = \frac{2}{(2)^2 + 1} = \frac{2}{5}$$

$$f(x)_{máx} = \frac{1}{2} \; e \; f(x)_{min} = 0$$

67. Derivando f(t) para encontrar os pontos de inflexão:

$$f(t) = t\sqrt{4 - t^2} = t(4 - t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(t) = 1 \cdot (4-t^2)^{\frac{1}{2}} + t \cdot \frac{1}{2} \cdot (4-t^2)^{\frac{-1}{2}} \cdot (-2t) = \sqrt{(4-t^2)} + \frac{(-2t^2)}{\sqrt{(4-t^2)}}$$

$$f'(t) = 0$$

$$\sqrt{(4-t^2)} + \frac{(-t^2)}{\sqrt{(4-t^2)}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{(4-t^2)-t^2}{\sqrt{(4-t^2)}} = 0$$

$$4-2t^2 = 0 \;\; e \;\; \sqrt{(4-t^2)} \neq 0 \qquad \rightarrow \qquad t = \sqrt{2} \;\; ou \;\; \underbrace{t = -\sqrt{2}}_{fora\ do\ intervalo} \qquad e \;\; t \neq \pm 2$$

Substituindo na função os pontos de inflexão e o intervalo, temos:

$$f(-1) = (-1)\sqrt{4-(-1)^2} = -\sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})\sqrt{4-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

$$f(2) = (2)\sqrt{4-(2)^2} = 0$$

$$f(x)_{máx} = 2 \; e \; f(x)_{min} = -\sqrt{3}$$

68. Derivando f(x) para encontrar os pontos de inflexão:

$$f(x) = sen\, x + \cos x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \cos x - sen\, x$$

$$f'(x) = 0$$

$$\cos x - sen\, x = 0 \qquad \rightarrow \qquad \cos x = sen\, x$$

$$\underbrace{\mathrm{x} = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \mathrm{x} = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \mathrm{x} = \frac{\pi}{3}}_{\text{para o intervalo dado}}$$

Substituindo na função os pontos de inflexão e o intervalo, temos:

$$f(0) = sen\, 0 + \cos 0 = 1 + 0 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = sen \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})\sqrt{4-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$f(2) = (2)\sqrt{4-(2)^2} = 0$$

$$f(x)_{máx} = \sqrt{2} \; e \; f(x)_{min} = 1$$

69. Derivando f(x) para encontrar os pontos de inflexão:

$$f(x) = xe^{-x} \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$

$$f'(x) = 0$$

$$e^{-x} - x \cdot e^{-x} = 0 \qquad \rightarrow \qquad e^{-x}(1-x) = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 1$$

Substituindo na função os pontos de inflexão e o intervalo, temos:

$$f(0) = (0)e^{-(0)} = 0$$

$$f(1) = (1)e^{-(1)} = \frac{1}{e}$$

$$f(2) = (2)e^{-(2)} = \frac{2}{e^2}$$

$$f(x)_{máx} = \frac{1}{e} \quad e \quad f(x)_{min} = 0$$

70. Derivando f(x) para encontrar os pontos de inflexão:

$$f(x) = x - 3\ln x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 1 - \frac{3}{x}$$

$$f'(x) = 0$$

$$1 - \frac{3}{x} = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 3$$

Substituindo na função os pontos de inflexão e o intervalo, temos:

$$f(1) = 1 - 3\ln 1 = 1 - 0 = 1$$

$$f(3) = 3 - 3\ln 3 = 3(1-\ln 3)$$

$$f(4) = 4 - 3\ln 4$$

$$f(x)_{máx} = 1 \;\; e \quad f(x)_{min} = 3(1-\ln 3)$$

71. Derivando I(t) para encontrar os pontos de inflexão:

$$I(t) = 0{,}00009045t^5 + 0{,}0001438t^4 - 0{,}06561t^3 + 0{,}4598t^2 - 0{,}627t + 99{,}33$$

$$I'(t) = 0{,}00045225t^4 + 0{,}005752t^3 - 0{,}19683t^2 + 0{,}9196t - 0{,}627$$

$$I'(t) = 0$$

$$0{,}00045225t^4 + 0{,}005752t^3 - 0{,}19683t^2 + 0{,}9196t - 0{,}627 = 0$$

$$\text{t} = 5{,}1309 \text{ ou t} = 0{,}823 \text{ ou } \underbrace{\text{t} = 11{,}04 \text{ ou t} = -29{,}72}_{\text{fora do intervalo}}$$

Substituindo na função os pontos de inflexão e o intervalo, temos:

$$I(0) = 0{,}00009045(0)^5 + 0{,}0001438(0)^4 - 0{,}06561(0)^3 + 0{,}4598(0)^2 - 0{,}627(0) + 99{,}33 = 99{,}33$$

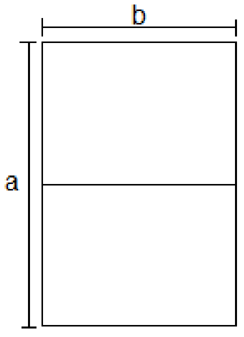
$$I(0{,}823) = 0{,}00009045(0{,}823)^5 + 0{,}0001438(0{,}823)^4 - 0{,}06561(0{,}823)^3 + 0{,}4598(0{,}823)^2 - 0{,}627(0{,}823) + 99{,}33 = 99{,}09$$

$$I(5{,}1309) = 0{,}00009045(5{,}1309)^5 + 0{,}0001438(5{,}1309)^4 - 0{,}06561(5{,}1309)^3 + 0{,}4598(5{,}1309)^2 - 0{,}627(5{,}1309) + 99{,}33 = 99{,}77$$

$$I(10) = 0{,}00009045(10)^5 + 0{,}0001438(10)^4 - 0{,}06561(10)^3 + 0{,}4598(10)^2 - 0{,}627(10) + 99{,}33 = 83{,}913$$

$$I(5{,}1309)_{máx} = 99{,}77 \;\; e \quad I(10)_{min} = 83{,}913$$

72.



Tirando a área da figura:

$$A = ab = 1{,}5$$

Para minimizar o custo da cerca, seu tamanho deverá ser mínimo:

$$C = 3b + 2a = 3b + 2 \cdot \frac{1{,}5}{b} = 3b + \frac{3}{b}$$

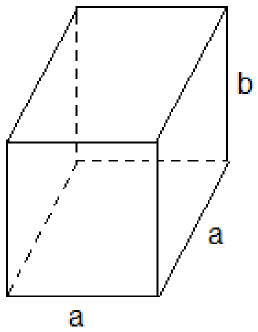
$$C' = 3 - 3/b^2$$

$$C' = 0 \quad \rightarrow \quad 3 - 3/b^2 = 0 \quad \rightarrow \quad b = 1 \; ou \; \underbrace{b = -1}_{valor\ negativo}$$

O ponto de inflexao tornará a custo mínimo, logo a dimesão do terreno será:

1000 pés/1500 pés.

73.



Tirando o volume da figura:

$$A = a^2 b = 32000$$

Para minimizar a quantidade de material, sua área deverá ser mínimo:

$$A = a^2 + 4ab = a^2 + 4a\frac{32000}{a^2} = a^2 + 128000a$$

$$A' = 2a - \frac{128000}{a^2}$$

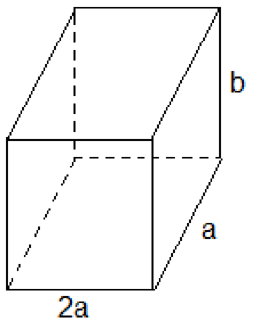
$$A' = 0 \qquad \rightarrow \qquad 2a - \frac{128000}{a^2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{2\,a^3 - 128000}{a^2} = 0$$

$$a = 40 \; e \; a \neq 0$$

O ponto de inflexao minimizará a quantidade de material, logo a dimesão da caixa será:

40 cm x 40 cm x 80 cm

74.



Tirando o volume da figura:

$$A = a \cdot 2a \cdot b = 2a^2 b = 32000$$

Para minimizar o custo, temos:

$$C = 2a \cdot a \cdot 10 + (2ab + 4ab) \cdot 6 = 20a^2 + 36ab = 20a^2 + \frac{180}{a}$$

$$C' = 40a - \frac{180}{a^2}$$

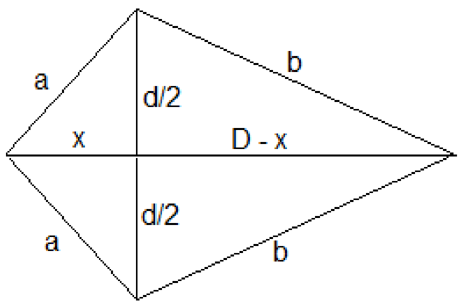
$$C' = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{40a^3 - 180}{a^2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 40a^3 - 180 = 0$$

$$a = 1{,}65 \; e \; a \neq 0$$

Para o custo ser mímino, basta substituir a = 1,65:

$$C = 20 \cdot (1{,}65)^2 + \frac{180}{1{,}65} = 163{,}54$$

75.



Relações que podemos tirar da figura:

$$a^2 = x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \qquad \rightarrow \qquad x = \sqrt{a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$b^2 = (D-x)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \qquad \rightarrow \qquad D - x = \sqrt{b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Maximizando a área para encontrar o valor das diagonais:

$$A = d \cdot x + (D-x) \cdot d = d \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \cdot d$$

$$A = d \cdot x + (D-x) \cdot d = d \cdot \left[\sqrt{a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right]$$

$$A' = 0$$

$$A' = 1 \cdot \left[\sqrt{a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right] + d\left[\frac{1}{2}\left[a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{-1}{2}} \left(\frac{-2d}{4}\right) + \frac{1}{2}\left[b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{-1}{2}} \left(\frac{-2d}{4}\right)\right] = 0$$

$$A' = \left[\sqrt{a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right] + \left(\frac{-d^2}{4}\right)\left[\left[a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{-1}{2}} + \left[b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{-1}{2}}\right] = 0$$

$$A' = \left[\sqrt{a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right] + \left(\frac{-d^2}{4}\right)\left[\frac{\sqrt{a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left[a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\left[b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]}}\right] = 0$$

$$A' = \left[\sqrt{a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right]\left[1 - \left(\frac{d^2}{4\sqrt{\left[a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\left[b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]}}\right)\right] = 0$$

$$\left[\sqrt{a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right] = 0 \; ou \; \left[1 - \left(\frac{d^2}{4\sqrt{\left[a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\left[b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]}}\right)\right] = 0$$

$$(i)$$

$$\left[\sqrt{a^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}+\sqrt{b^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}\right]=0 \quad \rightarrow \quad \left[\sqrt{a^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}\right]^2=\left[-\sqrt{b^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}\right]^2$$

$$a^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2=b^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad a=b$$

Substituindo $\mathrm{a}=\mathrm{b}$ na equação(i) chegamos a um absurdo.

$$(ii)$$

$$1-\left(\frac{d^2}{4\sqrt{\left[a^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\left[b^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]}}\right)=0 \quad \rightarrow \quad \left[\frac{d^2}{4\sqrt{\left[a^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\left[b^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]}}\right]^2=1^{\,2}$$

$$\frac{d^4}{16\left[a^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\left[b^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]}=1 \quad \rightarrow \quad d^4=16\left[a^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\left[b^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]$$

$$\frac{d^4}{16}=a^2b^2-a^2\frac{d^2}{4}-b^2\frac{d^2}{4}+\frac{d^2}{4} \quad \rightarrow \quad a^2b^2-\frac{d^2}{4}(a^2+b^2)=0$$

$$a^2b^2=\frac{d^2}{4}(a^2+b^2) \quad \rightarrow \quad d^2=\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)} \quad \rightarrow \quad d=\frac{2ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

Substituindo $d=\frac{2ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ na equação(ii) chegamos a uma verdade, logo:

$$D-\sqrt{a^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}=\sqrt{b^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad \rightarrow \quad D^2=\left[\sqrt{b^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}-\sqrt{a^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}\right]^2$$

$$D^2=b^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2-2\sqrt{\left[b^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\left[a^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]}+a^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$D^2=b^2+a^2-d^2-2\sqrt{\left[b^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\left[a^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]} \quad \text{substituindo } \mathrm{d}^2$$

$$D^2=b^2+a^2-\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)}-2\sqrt{\left[b^2-\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}\right]\left[a^2-\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}\right]}$$

$$D^2 = b^2 + a^2 - \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)} - 2\sqrt{\left[\frac{a^2b^2 + b^4 - a^2b^2}{(a^2+b^2)}\right]\left[\frac{a^2b^2 + a^4 - a^2b^2}{(a^2+b^2)}\right]}$$

$$D^2 = b^2 + a^2 - \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)} - 2\sqrt{\left[\frac{a^4b^4}{(a^2+b^2)^2}\right]}$$

$$D^2 = b^2 + a^2 - \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)} - 2\,\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}$$

$$D^2 = \frac{a^2b^2 + b^4 + a^2b^2 + a^4 - 6a^2b^2}{(a^2+b^2)} \quad \rightarrow \quad D^2 = \frac{b^4 + a^4 - 4a^2b^2}{(a^2+b^2)}$$

$$D^2 = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)} = (a^2+b^2) \quad \rightarrow \quad D = \sqrt{(a^2+b^2)}$$

O valor das diagonais:

$$d = \frac{2ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \quad e \quad D = \sqrt{(a^2+b^2)}$$