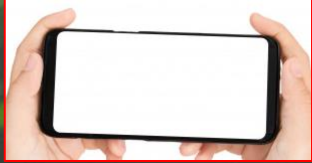


Aula 6

CÁLCULO 1
ENG. DE ALIMENTOS

Prof. Dr. Paulo A. Oliveira

Aula – 7

LIMITES:

Resumo geral;

CONTINUIDADE DE FUNÇÕES:

Definição com exemplos;

Gráficos;

DERIVADAS

Definição com exemplos;

Teoremas

Continuidade de uma Função

DEFINIÇÃO

Dizemos que a função f é **contínua** no número a se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

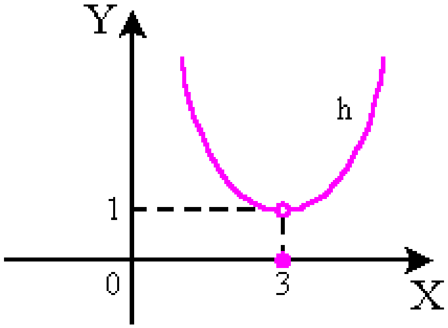
(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

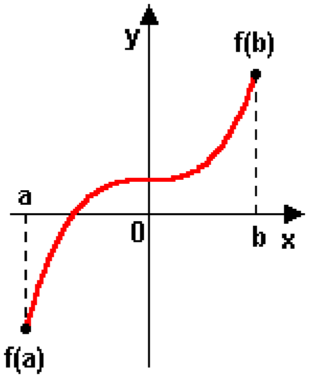
(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

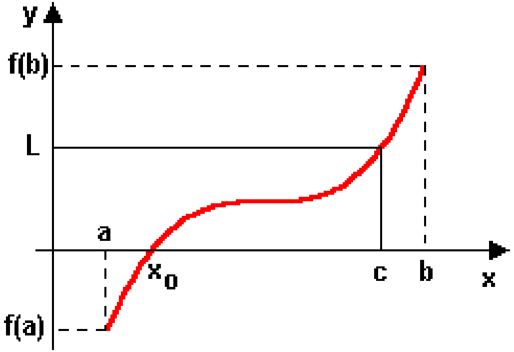
Se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em a, a função f será **descontínua** em a.

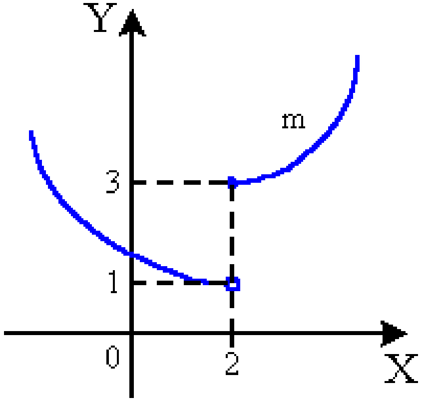
Exemplos de funções Contínuas e Descontínuas



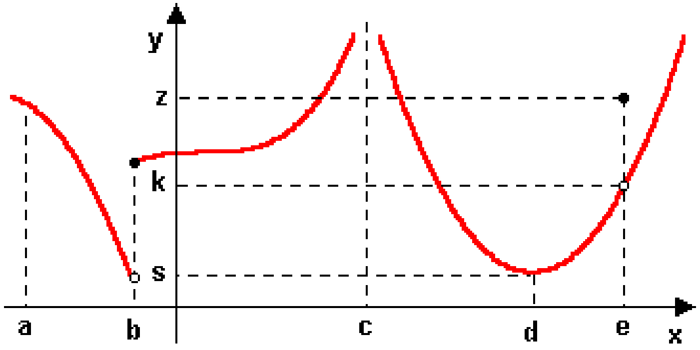
$$\lim_{x\to 3} h(x) = 1$$
$$h(3) = 0$$







$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} m(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} m(x) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{não existe } \lim_{x\to 2} m(x)$$



EXEMPLO 4 Determine os números nos quais a função a seguir é contínua.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

Solução As funções tendo valores $2x - 3$ e x^2 são funções polinomiais e, portanto, contínuas em qualquer número. Assim, o único número no qual a continuidade é questionável é 1. Vamos testar as três condições de continuidade em 1.

(i) $f(1) = -1$. Assim, a condição (i) é verificada.

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 3) \qquad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2$

$$= -1 \qquad\qquad\qquad\qquad = 1$$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, o limite bilateral $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ não existe. Logo, f é descontínua em 1. Mas f é contínua em todo número real, exceto 1.

Continuidade de uma Função

TEOREMA

Se f e g forem funções contínuas em um número a, então

(i) $f + g$ será contínua em a;

(ii) $f - g$ será contínua em a;

(iii) $f \cdot g$ será contínua em a;

(iv) f/g será contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

Exemplo: **Analise se G(x) é contínua em todos os pontos, em especial em x = 4**

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} & \text{se } x \neq 4 \\ 2 & \text{se } x = 4 \end{cases}$$

DERIVADA - DEFINIÇÃO

A **derivada** de uma função f é a função denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

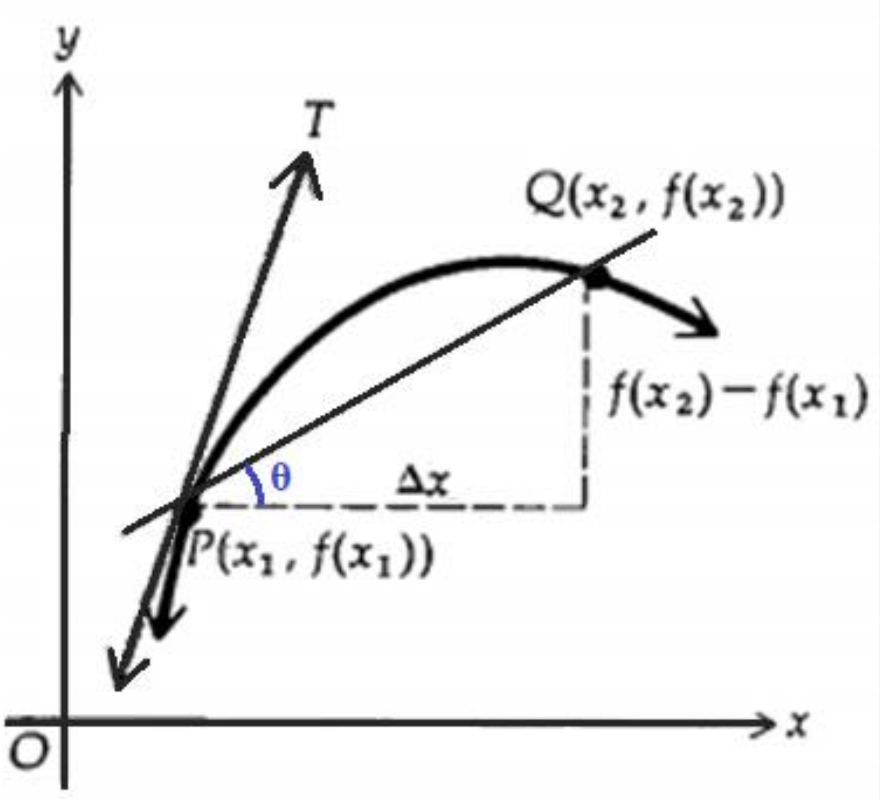
se esse limite existir.

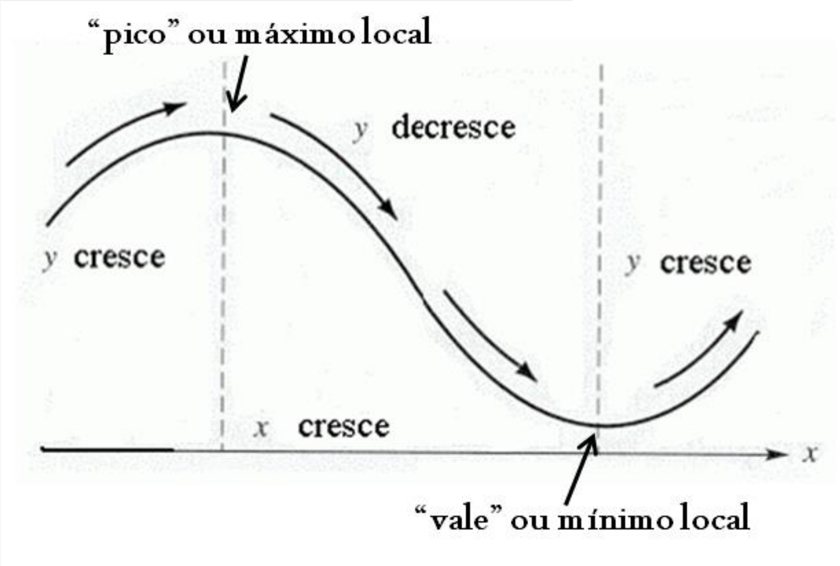
DERIVADA NO PONTO X1:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Veja o Applet: https://www.geogebra.org/m/NNnd6y4H

DERIVADA – Interpretação Gráfica





$\Delta x \to 0$: $m = tg(\theta) = f'(x_1)$

T : reta tangente em x1

Applet: https://www.geogebra.org/m/WqGED5tn

DERIVADA – Exemplo resolvido

Ache a derivada de f se $f(x) = 3x^2 + 12$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 12] - (3x^2 + 12)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 3x^2 - 12}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\,\Delta x)$$

$$= 6x$$

DERIVADA: TEOREMAS E PROPRIEDADES

Se uma função f for derivável em x_1, então f será contínua em x_1.

Se c for uma constante e se $f(x) = c$ para todo x_1 então

$$f'(x) = 0$$

Prova

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 0$$

$$= 0$$

DERIVADA: TEOREMAS E PROPRIEDADES

$$\boxed{D_x(c) = 0}$$

Se n for um inteiro positivo e se $f(x) = x^n$, então

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Se f for uma função, c uma constante e g a função definida por

$$g(x) = c \cdot f(x)$$

então, se $f'(x)$ existir,

$$g'(x) = c \cdot f'(x)$$

$$\boxed{D_x[c \cdot f(x)] = c \cdot D_x f(x)}$$

$$\boxed{D_x(cx^n) = cnx^{n-1}}$$

DERIVADA: TEOREMAS E PROPRIEDADES

Se f e g forem funções e se h for a função definida por

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

então, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

Se f e g forem funções e h for a função definida por

$$h(x) = f(x)g(x)$$

então, se existirem $f'(x)$ e $g'(x)$,

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)\,D_x g(x) + g(x) \cdot D_x f(x)$$

DERIVADA: TEOREMAS E PROPRIEDADES

Se f e g forem funções e se h for a função definida por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{onde } g(x) \neq 0$$

então se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}$$

DERIVADA: TEOREMAS E PROPRIEDADES

Se $f(x) = x^{-n}$, onde $-n$ é um inteiro negativo e $x \neq 0$, então

$$f'(x) = -nx^{-n-1}$$

Se r for um inteiro qualquer positivo ou negativo,

$$\boxed{D_x(x^r) = rx^{r-1}}$$

$$\boxed{D_x(cx^r) = crx^{r-1}}$$

ATENÇÃO: “r” pode ser qualquer número Racional

DERIVADA DA RAIZ

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{(1/2 - 1)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{x^p} = x^{p/n}}$$

OBRIGADO por sua atenção!

- Assista, pause e reflita sobre este vídeo! ☺
- Leia o material sugerido (Livro e artigos)!
- Busque mais informações por sua conta!
- Faça os exercícios propostos o quanto antes!