Aula 3: 19/08/2024

CÁLCULO 1

ENG. DE ALIMENTOS

Prof. Dr. Paulo A. Oliveira

Aula – 3

LIMITES:

Definição formal;

Teoremas e propriedades;

Formas indeterminadas;

Limites laterais;

Limites: Definição Formal

Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio número a. O **limite de $f(x)$ quando x tende a a será L**, escrito como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se a seguinte afirmativa for verdadeira:

Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon \qquad (4)$$

Exemplo - Limite: Definição Formal

$$a)\lim_{x \to 2} 2x + 1 = 5$$

$$b)\lim_{x \to 1} x^2 + x = 2$$

Definição: Limites Laterais

Seja f uma função que está definida em todos os números de algum intervalo aberto (a, c). Então, o **limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < x - a < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

EXEMPLO: $\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = 0$

Definição: Limites Laterais

Seja f uma função definida em todos os números de algum intervalo aberto (d, a). Então, o **limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que

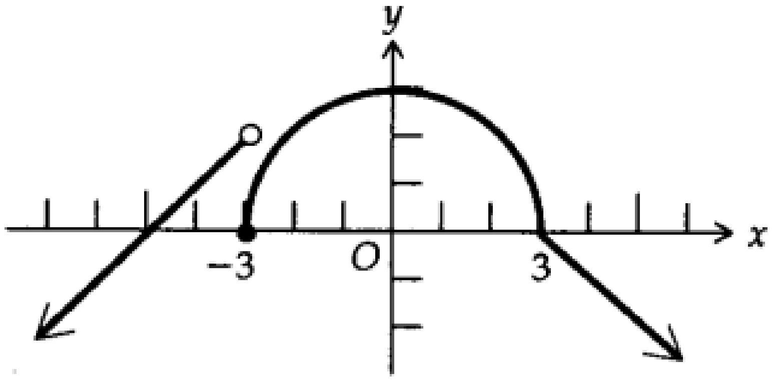
$$\text{se } 0 < a - x < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

TEOREMA

$\lim_{x \to a} f(x)$ existe e será igual a L se e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existirem e forem iguais a L.

Exemplo: Limites Laterais

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{se } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 3 - x & \text{se } 3 < x \end{cases}$$



$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} (x + 5) = 2 \qquad \lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0$$

Como $\lim_{x \to -3^-} f(x) \neq \lim_{x \to -3^+} f(x)$, então $\lim_{x \to -3} f(x)$ não existe.

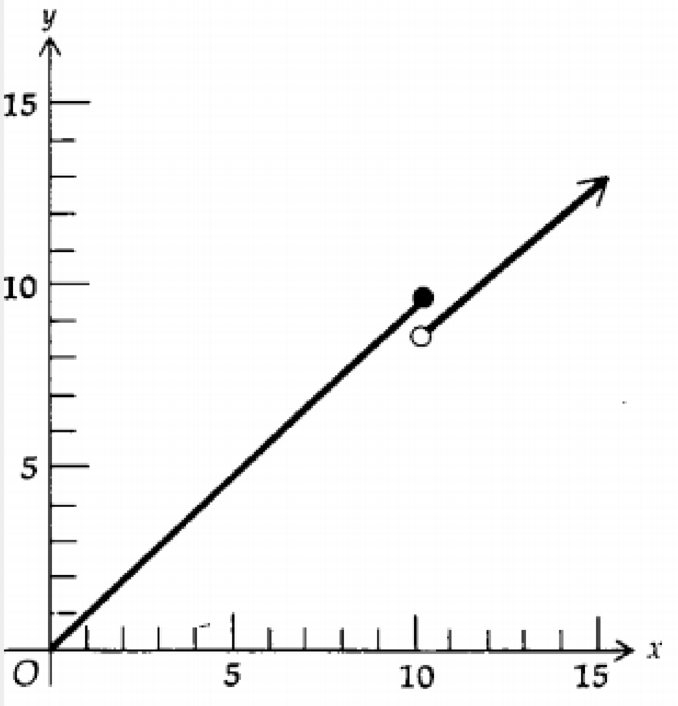
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (3 - x) = 0$$

Como $\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$, então $\lim_{x \to 3} f(x)$ não existe.

Exemplo - Limites Laterais

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0{,}9x & \text{se } 10 < x \end{cases}$$

Resolva: $\lim_{x \to 10} C(x)$



Teoremas dos limites

1 Se m e b forem constantes quaisquer,

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

2 Se c for uma constante, então para qualquer número a,

$$\lim_{x \to a} c = c$$

3 $$\lim_{x \to a} x = a$$

Teoremas dos limites

4 Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

6 Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

8 Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e n for um inteiro positivo qualquer, então

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$$

Teoremas dos limites

9 Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{se } M \neq 0$$

10 Se n for um inteiro positivo e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

com a restrição de que se n for par, $L > 0$.

11 **Seja f(x) = g(x), para todo x, exceto em x = a possivelmente. Então**

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

Exercícios

Resolva os limites abaixo, use os teoremas 1 a 10;

5. $\lim_{z \to -2} (z^3 + 8)$

10. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4}$

7. $\lim_{x \to 3} \dfrac{4x - 5}{5x - 1}$

12. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x + 4}{x^3 + 1}}$

Teoremas dos limites: Forma indeterminada

11 Seja f(x) = g(x), para todo x, exceto em x = a possivelmente, onde f(a) não está definida. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

Exemplo: $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

ATENÇÃO:

Neste teorema usaremos fortemente os conteúdos do ensino médio, apontado na primeira aula: Fatoração, Divisão algébrica, Produtos notáveis, Racionalização, etc.

Exercícios

Resolva os limites abaixo, use o teorema 11;

3.1 $\lim_{s \to 4} \frac{3s^2 - 8s - 16}{2s^2 - 9s + 4}$

3.2 $\lim_{y \to -2} \frac{y^3 + 8}{y + 2}$

3.3 $\lim_{y \to -3} \sqrt{\frac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}}$

3.5 $\lim_{s \to 1} \frac{s^3 - 1}{s - 1}$

3.6 $\lim_{t \to 3/2} \sqrt{\frac{8t^3 - 27}{4t^2 - 9}}$

Extras: 31. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ 32. $\lim_{h \to -1} \frac{\sqrt{h + 5} - 2}{h + 1}$ 34. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

OBRIGADO por sua atenção!

Assista, pause e reflita sobre este vídeo! ☺

Leia o material sugerido (Livro e artigos)!

Busque mais informações por sua conta!

Faça os exercícios propostos o quanto antes!