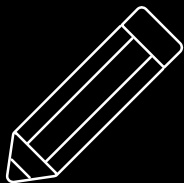


Aula 2 – 2024/-02
Sala 211 – Bloco J – 08h



CÁLCULO 1

ENG. DE ALIMENTOS



Prof. Dr. Paulo A. Oliveira



Aula - 2

LIMITES:

Definição formal;

Unicidade;

Limites pelas tabelas

Limite intuitivo



LIMITE

DE UMA FUNÇÃO REAL



Limites: História

Introdução

O conceito de **limite** é fundamental no **cálculo diferencial**, um campo da Matemática que iniciou – se no século XVII sendo bastante produtivo em resultados e aplicações em várias áreas do conhecimento, como a Física, a Engenharia, a Economia, a Geologia, a Astronomia, a Biologia, entre outras.

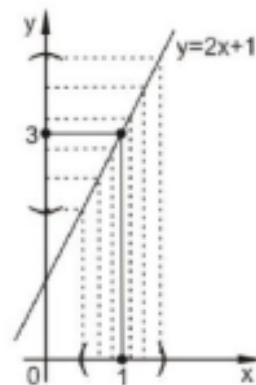
Com o desenvolvimento do cálculo diferencial, matemáticos como Huygens (1629 – 1695), Newton (1642 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716) tiveram papel marcante. Buscando aperfeiçoar a conceituação de limites, tiveram destaques as contribuições de d' Alembert (1717 – 1783) e de Cauchy (1789 – 1857).

Limites: Noção intuitiva

Seja a função $f(x) = 2x + 1$. Vamos associar valores de x que se aproximem de 1, pela sua direita (valores maiores que 1) e pela esquerda (valores menores que 1) e calcular o valor correspondente de y .

Pela direita	
x	$y = 2x + 1$
1,5	4
1,3	3,6
1,1	3,2
1,05	3,1
1,02	3,04
1,01	3,02

Pela esquerda	
x	$y = 2x + 1$
0,5	2
0,7	2,4
0,9	2,8
0,95	2,9
0,98	2,96
0,99	2,98



Observamos que quando x tende para 1, y tende para 3 e o limite da função é 3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$$

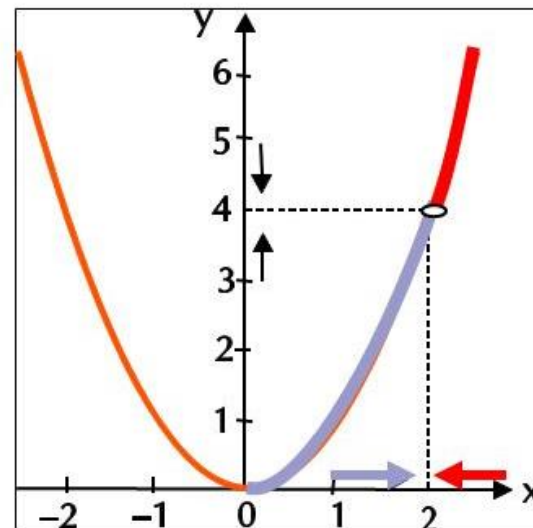
Noção Intuitiva de Limite

aproximação pela esquerda de 2

x	f(x)
1,900	3,610000
1,990	3,960100
1,999	3,996001
2,000	4,000000
2,001	4,004001
2,010	4,040100
2,100	4,410000

aproximação pela direita de 2

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} (x^2) = 4$$



“O limite da função $f(x) = x^2$ quando x tende a 2 é 4”.

Limites: Por tabela (intuitivo)

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

Tabela 1

x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0	3
0,25	3,5
0,5	4
0,75	4,5
0,9	4,8
0,99	4,98
0,999	4,998
0,9999	4,9998
0,99999	4,99998

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 5$$

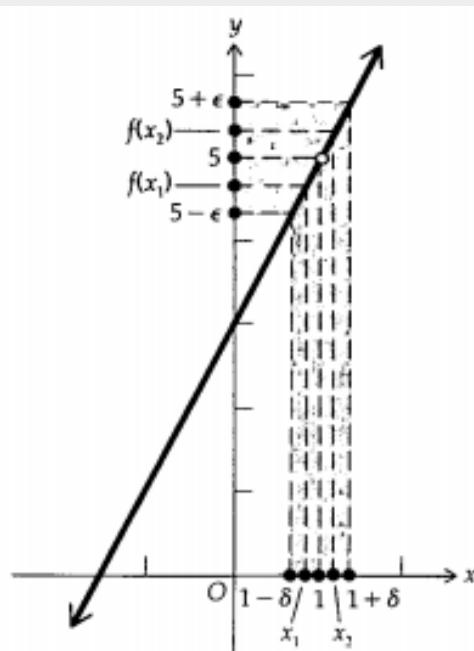


FIGURA 3

Tabela 2

x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
2	7
1,75	6,5
1,5	6,0
1,25	5,5
1,1	5,2
1,01	5,02
1,001	5,002
1,0001	5,0002
1,00001	5,00002

Limites (intuitivo): Aproximações

- 4 para cada lado (direita e esquerda)
- Obedecer uma certa lógica
- Marcar o ponto na Reta Real
- Ter atenção ao Sinal do número
- Cuidado com as Raízes e Frações

Limites: Por tabela (intuitivo)

Exemplo - Faça as aproximações, usando 4 valores para cada:

a) $x \rightarrow (0)$

b) $x \rightarrow (4)$

c) $x \rightarrow (-4)$

d) $x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{+}$

e) $x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{-}$

f) $x \rightarrow (\sqrt{2})$

Limites: Definição Formal

Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente no próprio número a . O limite de $f(x)$ quando x tende a a será L , escrito como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

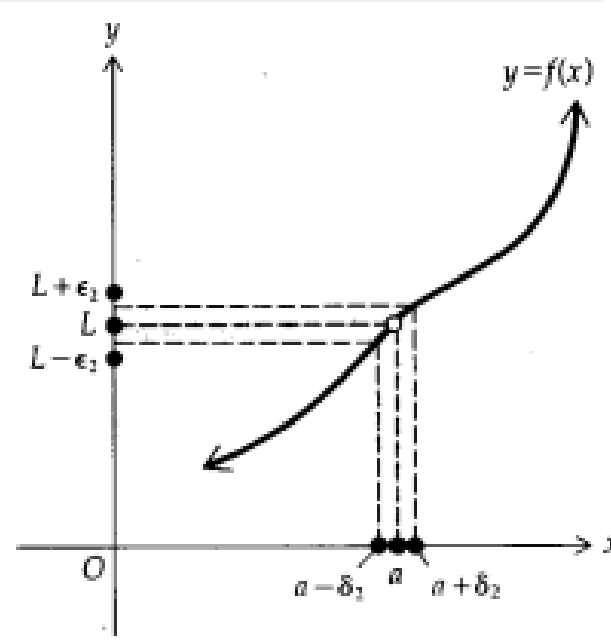
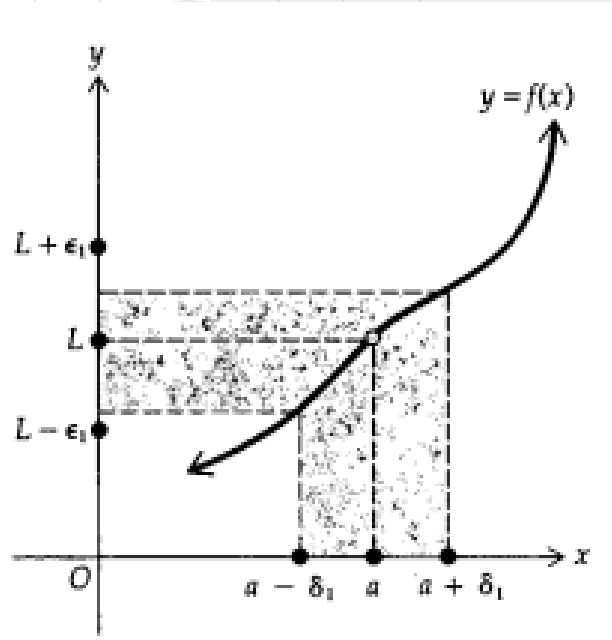
se a seguinte afirmativa for verdadeira:

Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon \quad (4)$$

De maneira geral, escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, se, quando x se aproxima de a ($x \rightarrow a$), $f(x)$ se aproxima de b ($f(x) \rightarrow b$).

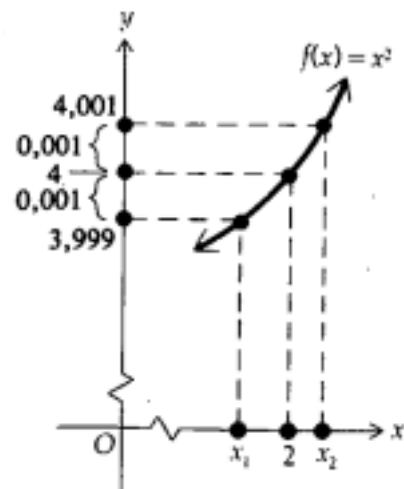
Limites: Definição Formal



EXEMPLOSeja f a função definida por

$$f(x) = x^2 \text{ e suponha}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

Usando uma figura para $\epsilon = 0,001$, determine $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - 2| < \delta \text{ então } |f(x) - 4| < 0,001$$

Solução

Veja a Figura 8 e observe que se $x > 0$, os valores funcionais aumentam à medida que os valores de x crescem. Assim, a figura indica que precisamos de um valor positivo de x_1 , tal que $f(x_1) = 3,999$ e um valor positivo de x_2 , tal que $f(x_2) = 4,001$, isto é, precisamos de um x_1 e de um x_2 , tal que

$$x_1^2 = 3,999 \quad x_2^2 = 4,001$$

Cada uma dessas equações tem duas soluções. Em cada caso, rejeitamos a raiz quadrada negativa, pois x_1 e x_2 são positivos. Assim

$$x_1 = \sqrt{3,999} \quad x_2 = \sqrt{4,001}$$

$$x_1 \approx 1,9997 \quad x_2 \approx 2,0002$$

Então, $2 - 1,9997 = 0,0003$ e $2,0002 - 2 = 0,0002$. Como $0,0002 < 0,0003$, escolhemos $\delta = 0,0002$; assim temos a afirmativa

$$\text{se } 0 < |x - 2| < 0,0002 \text{ então } |f(x) - 4| < 0,001$$

Qualquer número positivo menor do que 0,0002 pode ser selecionado como o δ requerido.

Limites: Por tabela (intuitivo)

Limite lateral à esquerda (valores menores que a):

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Limite lateral à direita (valores maiores que a):

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

ATENÇÃO: O limite só existe se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

EXEMPLO

Calcule os limites abaixo usando as tabelas e calculadora (aula1), identifique o ε e o δ em cada linha.

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} 2x + 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1$$

Limites: Por tabela (intuitivo)

Exemplo - Faça as aproximações, usando 4 valores para cada:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 4}{8x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2 + 3x + 4}{x^3 + 1}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 3/2} \sqrt{\frac{8t^3 - 27}{4t^2 - 9}}$$

$$\lim_{h \rightarrow -1} \frac{\sqrt{h + 5} - 2}{h + 1}$$

$$* \text{ g) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan \pi x}{x + 2}$$

$$* \text{ h) } \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$$



OBRIGADO por sua atenção!



Assista, pause e reflita sobre este vídeo! 😊



Leia o material sugerido (Livro e artigos)!



Busque mais informações por sua conta!



Faça os exercícios propostos o quanto antes!